ВІСНИК
засновований
1993
Дніпропетровський національний університет

ISSN 9125 0912

ВІСНИК
Дніпропетровського університету

2009 Т. 17 № 6/1

Серія

МАТЕМАТИКА
Випуск 14

ISSN 9125 0912
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІСНИК

Заснований 1993

Дніпропетровський національний університет

Дніпропетровського університету

Науковий журнал

№ 6/1 Том 17 2009

Серія: МАТЕМАТИКА

Випуск 14

Дніпропетровськ
Видавництво
Дніпропетровського
національного університету

УДК 517

Друкується за рішенням вченої ради Дніпропетровського національного університету згідно з затвердженим планом видань 2009 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 7898 від 17.09.2003 р.

Изложены результаты исследований по вопросам теории приближений функций действительного переменного, алгебре, уравнениям математической физики, а также по их применению к решению задач.

Для научных сотрудников, а также аспирантов и студентов старших курсов.

Викладено результати досліджень з питань теорії наближень функцій дійсної змінної, алгебри, рівнянням математичної фізики, а також їхнього застосування до розв'язування задач.

Для наукових співробітників, а також аспірантів та студентів старших курсів.

Рецензенти:

акад. Академії наук ВШ України,
д-р фіз.-мат. наук, проф. М.П.Тіман,
д-р фіз.-мат. наук, проф. В.В. Лобода

Л.Г. Бойцун, Т.И. Рыбникова
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

Известный математик, выдающаяся личность XXI века

Выдающаяся личность XXI столетия живёт в Днепропетровске и преподает в Днепропетровском агроуниверситете Это доктор физико-математических наук, заведующий кафедры высшей математики профессор Майор Филиппович Тиман.

Его биография украсила справочник «Великие умы XXI столетия», вошла в книгу «500 Величайших Гениев XXI столетия» (Американский Биографический Институт, США, 2004 и 2006 годов.). В 20008 году Американский Биографический Институт наградил его «Золотой медалью гражданина Украины» за успех, энтузиазм, смелость, вдохновение, преданность своему делу, мастерство, добродетельность. Добавим к этому, что Майор Филиппович Тиман обладатель почётного звания «Человек 2002 года», «Человек 2005 года». Одним словом, чтобы быть известным, не обязательно быть артистом или футболистом. Достаточно быть талантливым математиком, таким как Майор Филиппович Тиман, академик АНВОУ, доктор физико-математических наук, профессор, автор многих публикаций в отечественных и зарубежных научных изданиях.

Майор Филиппович Тиман родился 30 августа 1923 года в городе Золотоноша Черкасской области в семье рабочего по найму. В 1927-м. его семья переезжает на работу в один из колхозов Покровского района Днепропетровской области. Родители М. Тимана не имели даже начального образования, но мать – Татьяна Иосифовна мечтала о том, чтобы сыновья (кроме Майора их было ещё трое) получили образование в городе, и добилась переезда всей семьи в город Днепропетровск. Мать трудилась каменщиком на больших стройках, отец, Филипп Маркович – на металлургическом заводе им. Петровского. До войны семья Тиманов жила на улице Садовой (нынче Серова) в полуподвале чётвертого дома, а рядом раскинулся парк им. Чкалова (ныне Глобы). Студенты аграрного университета будут удивлены, узнав, что ныне известный математик, их требовательный преподаватель Майор Филиппович Тиман, обучаясь в чётвертом классе, пропустил целый год занятий. Взяв с собой ранец с книжками и обед, он вместе с братом-близнецом отправлялся играть с ребятами в футбол в парк. Совсем случайно их мама узнала про это. Заволновалась, упросила учителей, а вернее - выплакала разрешение на сдачу экзаменов за пропущенный чётвертый год обучения. И засели братья за книжки. За две недели нужно было выучить годовую программу по языку и математике. Вот тут и проявились необычные способности юноши. Майор успешно заполнял счётчики своей памяти и сразу безошибочно запоминал их. С особым азартом взялся за решение задач, примеров. На экзамене по арифметике маленький, упрямый игрок продемонстрировал прекрасные знания и отвечал уверенно и даже с усмешкой, чем удивлял учителей и поставил их в трудное положение. Дескать, как же быть? Непедагогично как будто ставить прогульщику «пятерку». Сошлись наконец-то на «чётверке». А вот брат испытаний не выдержал. Только Майор как-то равнодушно воспринял эти события, потому что был уже в плену математики, искал всё новые и новые задачники, увлекался головоломками, математическими играми и шахматами, став среди ровесников несравненным игроком в шашки, шахматы, карты, бильярд, футбол. И в дальнейшем учился достаточно успешно. Все науки давались эму легко.

В 1940 году, окончив рабфак при индустриальном техникуме, Майор Тиман поступает на физико-математический факультет ДГУ. Его неудержимый полёт за знаниями прервала война. 15 августа, за неделю до взятия немцами Днепропетровска, механический цех завода им. Петровского, в котором работал отец, эвакуируют в город Магнитогорск Челябинской области. Понятно, туда перебирается вся семья. Там, на Магнитогорском металлургическом комбинате работал не только отец, но и двое сыновей-близнецов и самый младший сын. Старший сын Александр уже был на фронте. В снарядном цехе комбината Майор начал свою трудовую деятельность в должности слесаря. Не успел он устроиться, на рабочем месте, как довелось собираться на фронт Его помыли, побрили, приняли в партию, но снова привели на завод, где он по 12 часов выстаивал в ново-токарном цехе за резьбошлифовальном станком, изготовлял инструмент для проверки артиллерийских снарядов. «В то тяжёлое время всего не хватало, никто нам ничего не давал. Станок «Герберт Линднер» на крупном заводе один лишь в ту пору резьбу шлифовал», – напишет позднее Майор Филиппович в своих воспоминаниях Надёжного в работе, весёлого и компанейского хлопца приметила парторг цеха А.М. Кухтина, порекомендовала секретарём комсомольской организации. Льгот это не давало никаких – обязанностей существенно прибавляло. В цехе сплошь мальчишки да девчонки, полуголодные, уставшее. Находил комсорг такие слова, чтобы привлечь ребят, призвать их к очередной трудовой вахте. И обучал себе смену, потому что готовился молодой коммунист к фронту. Ему дали другое задание - направили комсоргом ЦК ВЛКСМ в ремесленное училище металлургов №13, где готовили кадры для Магнитки. Потом вызвали в горком « Набирай бригаду лучших парней!». Нужно было строить ещё одну мощную домну. И они построили её в рекордно короткий срок – всего за три месяца. Здесь и получил Тиман свою первую, заработанную собственными мозолями награду – медаль «За трудовую доблесть». В 1944 году его избирают первым секретарём Кировского райкома комсомола города Магнитогорска. В этой должности он проработал до 1946 года. Комсомольская карьера Тимана стремительно идёт вверх, всё складывается самым лучшим образом: обучение в Москве в Высшей комсомольской школе, поступление в пединститут на заочное отделение математического факультета Во время собеседования секретарь ЦК ВЛКСМ, глянув на анкету, удивился: «Майором зовут? Ну, если от рождения Майор, так непременно генералом будешь!» Такой была юность учёного. И она не могла не наложить отпечаток на весь его облик. Уже в те годы определялись черты, за которые уважают М.Ф. Тиммана все, кто его знает: принципиальность, требовательность к себе и другим, подлинная, не показная забота о людях.

Война была позади, все родные давно в Днепропетровске, старший брат Александр Филиппович вернулся с войны. Майор во время отпуска едет увидеться с родными. Брат был удивлён, как влюблённый в математику Майор может посвятить жизнь партийной работе? Послушав совета брата, Майор отказался, как тогда считалось, от надёжной и перспективной карьеры, в 1946 году возвращается в Днепропетровск и продолжает получать математическое образование в Днепропетровском государственном университете на физико-математическом факультете.

В то время уйти из ЦК комсомола, уже, будучи секретарём райкома города Магнитогорска, и сказать: «Знаете, я всё оставляю, потому что всё-таки я хочу стать математиком» – нужно было быть необычайно смелым человеком. Но Майор Филиппович Тиман всегда имел чёткую позицию гражданина и учёного и всегда прямо её озвучивал. Наука захватила его надолго. Учиться ему – одно удовольствие. Он не ограничивался учёбной программой, работал дополнительно, занимался научной работой. С 1946 года М. Тиман – студент физико-математического факультета Днепропетровского государственного университета (ДГУ), который закончил с отличием в 1950-м. Вместе со своим однокурсником Владимиром Моссаковским, будущим ректором университета, становится сталинским стипендиатом. С 1947-го по 1951-й Майор Тиман, кроме учёбы являлся председателем профсоюзного комитета ДГУ. В 1948 – 1950 г. – член пленума ЦК профсоюза работников высшей школы и научных учреждений Украины. В 1950 году Майор Филиппович поступает в аспирантуру при кафедре математического анализа ДГУ. Его научный руководитель -- Исаак Ефимович Огиевецкий. В 1952 году он защищает кандидатскую диссертацию по теме «Некоторые вопросы теории суммирования двойных рядов и интегралов» (научный руководитель И.Е. Огиевецкий) и досрочно заканчивает учёбу в аспирантуре. Как раз в это время в Днепропетровском сельхозинституте создавалась кафедра высшей математики. Тиману пообещали жильё в обмен на согласие остаться в родном городе, и в августе 1952 года по направлению Министерства высшего образования Украины он направляется на работу в Днепропетровский сельскохозяйственный институт (теперь ДГАУ), где в сентябре этого же года избирается на должность заведующего кафедрой высшей математики ДГАУ. Желанного ордера на квартиру так и не получил, 11 лет прожил на 10 квадратных метрах с женой и маленьким ребёнком. «Жилищный вопрос» не испортил настырного учёного. И по сей день Майор Филиппович Тиман работает в должности заведующий кафедры вышей математики ДГАУ (более 56 лет – рекорд, наверное, не только для Днепропетровска).

Когда в нашу повседневную жизнь вошли компьютеры, по предложению ректора агроуниверситета академика М.Т. Масюка коллектив кафедры высшей математики взялся за освоение компьютерного дела на профессиональном уровне. Так и должно быть. Кому же, как не математикам, внедрять компьютеризацию? В 1995 году Майору Филипповичу предложили ещё одну кафедру – экономической кибернетики. Он не отказался, хотя ответственности прибавилось. С 1995 по 2000 год Майор Филиппович Тиман возглавлял, по совместительству и кафедру экономической кибернетики ДГАУ.

В кабинете Майора Филипповича на книжной полочке стоит пожелтевшая от времени книжечка с лаконичными сведениями на титульном листе: Академия Наук. Москва. 1969. Серия математическая. На развороте:

М.Ф.Тиман «О разностных свойствах функций многих переменных», – название статьи, которая сделала его известным математиком. Задача о разностных свойствах функций многих переменных важна для многих разделов математики, для прикладных наук. И можно добавить: над решением её лет двадцать бились учёные многих математических центров.

Свою научную деятельность М.Тиман начал в студенческие годы.

В 1948 году он публикует (Доклады Академии Наук СССР, т. 60, №5, 1948) свою первую работу, в которой исследуется вопрос о сравнении методов суммирования для кратных числовых рядов. После окончания аспирантуры научная деятельность Майора Филипповича концентрируется, в основном, в области конструктивной теории функций. Исследования в этой области поступают на «вооружение» физиков, механиков, программистов. Тиман занимается исследованием свойств функций одной и нескольких переменных в зависимости от поведения их наилучших приближений полиномами и целыми функциями конечной степени. Его работы (Мат. сборник, 46(88); 1, 1958; Изв. вузов, Математика, 6, 1961; Укр. Матем. журнал, 1, 1966) полностью решают в общем виде задачу о порядке убывания модулей гладкости функций в зависимости от поведения их наилучших приближений в Лебеговых пространствах L_p. В 1961 году Тиман устанавливает в общих конструктивных терминах окончательные критерии абсолютной сходимости кратных рядов Фурье как в изотропном, так и в анизотропном случаях. На базе своих работ (Доклады Академии Наук СССР, 137:5, 1961; Матем. сборник, 75, 3, 1968) Майор Филиппович получил окончательные критерии ядерности интегральных операторов Гильберта-Шмидта.

С 1961 года по 1968 год Тиман исследует в общих конструктивных терминалах порядки приближения функций линейными средними их рядов Фурье (Доклады Академии Наук СССР, 145, №4, №5, 1962; Доклад Академии Наук СССР , 181, №1. №6, 1968; Изд. Академии Наук, Математика, 29, 3, 1995). Эти работы позволили ему получить окончательные характеристики поведения общих интегралов типа свёртки для пространства L_p (см. Доклад Академии Наук СССР, 198, №4, 1971). В 1968 году Тиман (Доклады Академии Наук СССР, 181, 1, 1968; Изд. Академии Наук, Математика, 33, 3, 1969) устанавливает новые тождества между различными разностными формами функций многих переменных, из которых вытекают важные для теории функций окончательные соотношения между смешанными, полными и частными модулями гладкости различных порядков.

Свою первую докторскую диссертацию на тему «Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p и некоторые приложения» он успешно защищает в 39 лет (декабрь 1962 года) при Тбилисском математическом институте им. А.М. Размадзе АН Грузинской ССР. Для тех лет-это невиданно рано. Впрочем, работу без особых замечаний на протяжении четырёх лет «держат» в Москве и не утверждают. Однако Майор Тиман не унывает и продолжает успешно заниматься исследованием некоторых трудных задач теории функций, которые не поддавались решению в ряде математических центрах СССР и мира. Наконец, в 1973 году он успешно защищает новую докторскую диссертацию на тему «Исследование свойств функций с заданными наилучшими приближениями» при учёном совете механико-математического факультета Ленинградского государственного университета. Ведущей научной организацией был математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР.

Получив в 1976 году степень доктора наук, М. Тиман публикует ряд работ (Изв. вузов, Математика, 10/149. 1974; Analyisis Matematica, 4, 1, 1987), в которых содержатся его результаты по теоремам вложения классов функций одной и нескольких переменных. Он получает также аналоги теорем Харди-Литтльвуда о функциях с монотонными коэффициентами Фурье для произвольных периодических мультипликативных систем. Учёный указывает необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять ортонормированная система, для справедливости классической теоремы Пели.

Следует отметить также работы Майора Филипповича по выяснению некоторых аппроксимативных свойств – почти периодических функций с произвольным спектром (Украинский матем. Журн., 47, 9, 1995; Укр. матем. журнал, 9, 1998; Ряди Фур'є. Теорія і застосування. Праці інституту НАН України, 20, V, К., 1998),в которых получили свое решение ряд поставленных и ранее не получивших решения, задач. В 2000 году Тиман издает свою монографию «Аппроксимация и свойства периодических функций», в которой излагаются многочисленные его результаты и результаты других математиков по аппроксимации периодических функций В указанном далеко не полном обзоре перечислены основные работы Майора Филипповича, принесшие ему известность не только среди математиков Украины, но и за рубежом. На сегодняшний день у М.Ф.Тимана опубликовано 130 статей в отечественных и зарубежных изданиях, одна монография.

М. Тиман был научным руководителем и оказывал помощь в подготовке кандидатских и докторских диссертаций многим математикам. В разное время соискателями, аспирантами и преподавателями возглавляемой им кафедры защищены 21 диссертация.

Майор Филиппович отдает много сил подготовке и воспитанию высококвалифицированных специалистов для народного хозяйства. Он в разное время читал лекции и выступал с докладами в ДГУ, ДметИ, Тартуском университете, Бердянском и Ленинабадском педагогических институтах, институтах математики Баку и Тбилиси, во Всесоюзных математических школах (Тарту, Свердловск, Нальчик, Воронеж, Саратов, и др.)

М.Ф. Тиман – участник ряда всесоюзных и международных конференций по теории приближения функций, Всесоюзного съезда и Международного конгресса математиков. За последнее 15 лет он по приглашениям оргкомитетов был участником Международных конференций в городах: Днепропетровск – 1993 год, Хайфа – 1994-й, Москва – 1995-й, Будапешт – 1995-й, Камра – 1996-й, Каменец-Подольск – 1997-й, Киев – 1997-й, Москва – 1998-й, Киев – 2001-й, Киев (конференции им. М.Ф.Кравчука) – 2002, 2004, 2006, 2008 гг., Ужгород – 2006-й, Мелитополь – 2008-й, Саратов – 2004-й, Воронеж – 2008 год. Длительное время (более 15 лет) он был референтом Всесоюзного реферативного журнала «Математика» и реферативного журнала «Mathematical Reviews» Американского математического общества. В 1978–1980 годах Тиман был членом научно-методического Совета по математике при МВ и ССО СССР.

С 1989 года – член научно-методического Совета по математике при Министерстве образования Украины.

Несмотря на свой высокий статус Майор Филиппович Тимман очень прост в общении и с коллегами, и со студентами, приветлив и доброжелателен, одним словом, относится к той категории людей, кто не ставит свои профессиональные заслуги выше человеческих качеств. Всегда уважительно относится к окружающим, является наставником и советником для своих учеников и подчиненных. Сам Майор Филиппович говорит: «У меня в жизни два направления деятельности – основное это наука, а также общественная и административная работа».

Никогда не был Тиман человеком, не видящим ничего, кроме «своей» науки. Он всегда живёт интересами коллектива. И сегодня читает свыше 200 лекций в году, а в Киеве на разных конференциях, симпозиумах научного общества и заседаниях бывает почти каждый месяц. Многочисленные аспиранты и соискатели тоже требуют внимания от своего Учителя. Его энергии, активности ума может позавидовать молодой преподаватель. Майора Филипповича в Днепропетровском агроуниверситете знают все студенты и гордятся тем, что они учились у Тимана, а после окончания университета остаются его друзьями и поклонниками. Учёный имеет настоящую великую любовь и уважение всех, кто его знает и кому он и поныне оказывает необходимую профессиональную и просто человеческую помощь.

За плодотворную научную, педагогическую и трудовую деятельность М.Ф. Тиман награжден орденом «Дружба народов» (1981), Указом президента Украины (1993) ему присвоено почётное звание «Заслуженного работника народного образования Украины». В 1998 году Тиман награжден орденом «За заслуги» III степени. Кроме этого, он удостоен ещё 9 правительственных наград. В декабре 1995 г. Майор Филиппович Тиман избран академиком АН ВШУ. В декабре 2001 г. – стал лауреатом Ярослава Мудрого АН ВШУ. Имея более 30 наград, самой ценной для профессора является памятная медаль М.В. Остроградского математического конгресса 2001 года, «Золотая медаль гражданина Украины» («Gold Medal for Ukraine») Американского биографического института (2008 год).

Майор Филиппович Тиман всегда имел чёткую позицию гражданина, учёного и всегда прямо её озвучивал: о соотношении среднего образования и высшего, по Болонской системе и многом другом. Например, во время эфира на городском Днепропетровском государственном канале относительно уровня знаний у выпускников школ, а значит будущих студентов, Майор Филиппович сказал: «Рыночные отношения между родителями и учителями как ржавчина разъедают образование на Украине». Выступая на научно-методических конференциях М.Ф. Тиман анализирует состояние математического образования в учебных заведениях, говорит об известных перекосах, которые привели к снижению качества образования, и вносит много ценных предложений по его улучшению. Учёного, как и многих неравнодушных людей, волнует вопрос о том, что часть выпускников школы не имеет минимума знаний, необходимых каждому культурному человеку в его повседневной жизни, не усвоила моральные принципы, основанные на общественных ценностях. Может быть, именно за эту смелость, правду, откровенность его уважают коллеги, учёные, друзья, к его советам или замечаниям всегда прислушиваются. Летят годы, летят как расседланные кони. 4 сентября 2008 года коллектив Аграрного университета чествовал крупного учёного и организатора науки, талантливого педагога и активного общественного деятеля Тимана Майора Филипповича по случаю 85-летия со дня рождения и 65-летия трудовой и научно-педагогической деятельности. Поздравлений в адрес юбиляра пришло немало. Трудятся его воспитанники во всех концах страны, любят и помнят все его прекрасные дела. Как свидетельство таланта и трудолюбия учёного – многочисленные поздравления учёных ближнего и дальнего зарубежья.

Глядя на Майора Филипповича и общаясь с ним, думаешь о том, что время над ним не властно. Всё такой же бодрый, интересный, энергичный, аккуратно одетый и всегда улыбающийся, с приветливым открытым лицом он шагает коридорами Днепропетровского Аграрного университета, едва успевая отвечать на приветствия. Только фотоснимки – свидетели его насыщенного и немалого жизненного калейдоскопа.

Счастлива семейная страница в альбоме, как и в жизни. Всё время профессиональные успехи мужа разделяет жена Наталья Юрьевна. Выпускница исторического факультета сначала преподавала историю в университете, потом закончила механико-математический факультет и преподавала в технологическом техникуме, а затем работала ведущим специалистом отдела на Южном машиностроительном заводе г. Днепропетровска. С приходом пенсионного возраста посвятила себя полностью домашним заботам. Как мудрая женщина, знала, что так будет удобнее для всех. Прожить 55 лет с человеком, полностью преданным науке – дорого стоит. Их наибольшее общее приобретение – успехи мужа-математика, приобретенная мудрость и самое главное – семейное окружение: трое детей, пятеро внуков и трое правнуков. Сын Майора Филипповича – Сергей работает инженером на Стрелочном заводе г.Днепропетровска, дочь Сергея - Елена служит в органах внутренних дел города. Дочь Светлана – доцент Днепропетровского химико-технологического университета, её две дочери окончили Горный институт, живут в Москве. Дочь Елена занимается журналистской деятельностью в г.Одессе. Её дочь Лёля живёт тоже в Одессе, работает в банке, воспитывает двоих детей. Сын Елены закончил магистратуру морской академии, знает немецкий, английский, французский, занимается бизнесом.

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара поддерживает тесное сотрудничество с профессором М.Ф. Тиманом. Больше 5 лет Майор Филиппович является членом специализированного Учёного Совета ДНУ по математическому анализу, часто выступает оппонентом у молодых коллег при защите диссертаций. На протяжении 6 лет возглавляет государственную экзаменационную комиссию на механико-математическом факультете нашего университета.

«500 Величайших Гениев XXI столетия» – книга не для массовых биографий, в ней публикуются биографии только выдающихся личностей нашего мира. Среди них и украинский учёный Майор Филиппович Тиман из Днепропетровского государственного аграрного университета.

Надійшла до редколегії 07.11.08

УДК 517.5

Т.А. Агошкова, В.Н. Трактинська

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ЕЛЕМЕНТА НАЙКРАЩОГО НЕСИМЕТРИЧНОГО НАБЛИЖЕННЯ У ПРОСТОРАХ ІЗ ЗМІШАНОЮ ІНТЕГРАЛЬНОЮ МЕТРИКОЮ

Отримано критерій елемента найкращого несиметричного наближення для функцій багатьох змінних у просторах із змішаною інтегральною метрикою.

Нехай $L_{p_1,\dots,p_n}=L_{\bar{p}}$ – простір сумовних на паралелепіпеді $K=[a_1;b_1]\times\dots\times[a_n;b_n]$ функцій від n змінних $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(\bar{x})$. Якщо $0<\alpha,\beta<\infty$ та $f_\pm(x_1,\dots,x_n)=\max\{\pm f(x_1,\dots,x_n);0\}$, то покладемо,

$$\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} f(x_1,\dots,x_n)=\alpha\cdot\operatorname{sgn}f_+-\beta\cdot\operatorname{sgn}f_- \quad |f|_{\alpha,\beta}=\alpha\cdot f_++\beta\cdot f_-$$

Визначимо несиметричну норму у просторі $L_{\bar{p}}$ наступним чином:

$$\|f\|_{\bar{p},\alpha,\beta}=\|f\|_{p_1,\dots,p_n;\alpha,\beta}=\|\alpha f_++\beta f_-\|_{p_1,\dots,p_n}=$$

$$=\left(\int_{a_n}^{b_n}\left\{\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\dots\left[\int_{a_1}^{b_1}|f(\bar{x})|_{\alpha,\beta}^{p_1}dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\dots dx_{n-1}\right\}^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}dx_n\right)^{\frac{1}{p_n}} \tag{1}$$

Покладемо

$$|f|_{p_k,\dots,p_i;\alpha,\beta}=\left(\int_{a_i}^{b_i}\dots\left\{\int_{a_{k+1}}^{b_{k+1}}\left[\int_{a_k}^{b_k}|f(\bar{x})|_{\alpha,\beta}^{p_k}dx_k\right]^{\frac{p_{k+1}}{p_k}}dx_{k+2}\right\}^{\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}}\dots dx_i\right)^{\frac{1}{p_i}},$$

де $1\le k<n,\ 1<i\le n$.

Якщо $G\subset L_{\bar{p}}$, $0<\alpha,\beta<\infty$, то величина $E(f,G)_{p_1,\dots,p_n,\alpha,\beta}=\inf\limits_{g\in G}\|f-g\|_{p_1,\dots,p_n,\alpha,\beta}$ називається найкращим (α,β) – наближенням функції $f(\bar{x})$ множиною G у метриці $L_{\bar{p}}$. Поряд з простором $L_{p_1,\dots,p_n}$ розглядатимемо простір $L_{q_1,\dots,q_n}$, де числа p_i та q_i спряжені: $\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=1$, $i=\overline{1,n}$.

Введемо також до розгляду класи $L_{\infty,p_2,\ldots,p_n}$, $L_{p_1,\infty,p_3,\ldots,p_n}$, ..., $L_{p_1,\ldots,p_{n-1},\infty}$ функцій $f(\bar{x})$, норми яких визначаються за формулами:

$$\| f \|_{\infty,p_2,\ldots,p_n,\alpha,\beta} = \left(\int_{a_n}^{b_n} \left\{ \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \ldots \left[\int_{a_2}^{b_2} \left(\underset{[a_1,b_1]}{\operatorname{esssup}} | f |_{\alpha,\beta} \right)^{p_2} dx_2 \right]^{\frac{p_3}{p_2}} \ldots dx_{n-1} \right\}^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}},$$

$$\| f \|_{p_1,\ldots,p_{n-1},\infty,\alpha,\beta} = \underset{[a_n,b_n]}{\operatorname{esssup}} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \ldots \left(\int_{a_1}^{b_1} | f |_{\alpha,\beta}^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \ldots dx_n \right)^{\frac{1}{p_{n-1}}},$$

$$\| f \|_{p_1,\ldots,p_{i-1},\infty,p_{i+1},\ldots,p_n,\alpha,\beta} = \left(\int_{a_n}^{b_n} \ldots \left[\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \left[\underset{[a_i,b_i]}{\operatorname{esssup}} | f |_{p_1,\ldots,p_{i-1}} \right]^{p_{i+1}} dx_{i+1} \right]^{\frac{p_{i+2}}{p_{i+1}}} \ldots dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}},$$

де $1 < i \le n$, та скінчені.

Питання характеризації елемента найкращого наближення у просторах із змішаною інтегральною метрикою для функцій двох змінних були досліджені Г.С. Смирновим [2] в 1973 році. Його результати були розповсюджені В.М.Трактинською на випадок функцій багатьох змінних [4], а для функцій двох змінних – на випадок несиметричного наближення [5]. Мета цієї роботи отримати критерій елемента найкращого несиметричного наближення для функцій багатьох змінних у просторах із змішаною інтегральною метрикою.

Повторюючи міркування відповідної теореми про вид лінійного функціоналу, неважко отримати наступне твердження

Теорема 1. *Кожний лінійний неперервний функціонал, заданий у просторі* $L_{\bar{p}}$, *має вигляд*

$$F(f) = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(\bar{x}) \alpha(\bar{x}) dx_1 \ldots dx_n,$$

де $f(\bar{x})$ *– будь-яка функція з* $L_{\bar{p}}$, *а* $\alpha(\bar{x})$ *– деяка функція з* $L_{\bar{q}}$, *що визначається за функціоналом F, і при цьому:* $\| F \| = \| \alpha \|_{\bar{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}}$.

Нехай на K задана лінійно незалежна система функцій $\varphi_k \in L_{\bar{p}}$ $(k = \overline{1,n})$. Позначимо $H_n = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Далі нам знадобляться наступні твердження.

Лема 1. *Нехай* $\varphi(\bar{x}) \in L_{\bar{q}}$ *та у просторі* $L_{\bar{q}}$ *несиметрична норма введена наступним чином:* $\|\varphi\|_{\bar{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}} = \|\alpha^{-1}\varphi_{+} + \beta^{-1}\varphi_{-}\|_{\bar{q}}$.

Тоді:
$$\sup_{\|f\|_{\bar{p},\alpha,\beta} \le 1} \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f(\bar{x})\varphi(\bar{x})\,dx_1 \ldots dx_n = \|\varphi\|_{\bar{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}}.$$

Лема 2. *Якщо функція* $f(\bar{x}) \in L_{\bar{p}}$, *тоді*
$$\|f\|_{\bar{p},\alpha,\beta} = \sup_{\|g\|_{\bar{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1} \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f(\bar{x})g(\bar{x})\,dx_1 \ldots dx_n. \tag{2}$$

Якщо $\|f\|_{\bar{p},\alpha,\beta} > 0$, *тоді sup в правій частині (2) досягається для функції*
$$g_0(\bar{x}) = \begin{cases} \|f\|_{\bar{p},\alpha,\beta}^{1-p_n} |f|_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta}^{p_n - p_{n-1}} \times \ldots \times |f|_{p_1,\alpha,\beta}^{p_2-p_1} |f|_{\alpha,\beta}^{p_1-1} \mathrm{sgn}_{\alpha,\beta} f, \\ \qquad\qquad \text{якщо } |f|_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta}^{p_{n-1}} > 0 \\ 0, \qquad\qquad \text{якщо } |f|_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta}^{p_{n-1}} = 0 \end{cases}$$

Функція $g_0(\bar{x})$ *буде єдиною (якщо хоча б одне з* $p_i = 1$, *то за припущенням, що* $f(\bar{x}) \neq 0$ *майже скрізь на* K*).*

Теорема 2. *Нехай* $1 \le p < \infty$ *та* $0 < \alpha, \beta < \infty$. *Тоді для будь-якої функції*
$$f(\bar{x}) \in L_{\bar{p}}: E_n(f)_{\bar{p},\alpha,\beta} = \sup \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f(\bar{x})g(\bar{x})\,dx_1 \ldots dx_n, \tag{3}$$

де $\|g\|_{\bar{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1$ *і* $\int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} P_n(\bar{x})g(\bar{x})\,dx_1 \ldots dx_n = 0$ *для будь-якого* $P_n \in H_n$.

Верхня межа у (3) досягається на деяких функціях $\varphi(\bar{x}) \in L_{\bar{q}}$ з $\|\varphi\|_{\bar{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1$.

Теорема 3. *Нехай* H *- підпростір лінійного простору X, p(x) – задана на X несиметрична напівнорма. Якщо* $p(x, H) > 0$, *тоді відношення* $p(x-u_0) = \inf p(x-u)$ *для елемента* $u_0(x,y) \in H$ *виконується тоді і тільки тоді, коли існує лінійний функціонал* $f_0(x,y)$, *заданий на X, який задовольняє наступні умови:*

1) $\sup_{x \in X:\, p(x) \le 1} f_0(x) = 1$,

2) $p(x - u_0) = f_0(x)$,

3) $f_0(u) = 0$, $\forall u \in H$.

З теореми 3, враховуючи вигляд лінійного функціоналу в $L_{\bar p}$, одразу отримуємо наступний результат.

Теорема 4. *Нехай* H – *підпростір простору* $\mathrm{L}_{\bar p}$ *та* $f(\bar x)\in L_p\backslash H$. *Відношення* $\| f-u_0\|_{\bar p,\alpha,\beta}=\inf\limits_{u\in H}\| f-u\|_{\bar p,\alpha,\beta}$ *для* $u_0(\bar x)\in H$ *має місце тоді і тільки тоді, коли існує функція* $\alpha_0(\bar x)\in L_{\bar q}$ *яка задовольняє умови:*

1) $\|\alpha_0\|_{\bar q,\alpha^{-1},\beta^{-1}}=1$,

2) $\| f-u_0\|_{\bar p,\alpha,\beta}=\int\limits_{a_1}^{b_1}\ldots\int\limits_{a_n}^{b_n} f(\bar x)\alpha_0(\bar x)dx_1\ldots dx_n$,

3) $\sup\limits_{u\in H}\int\limits_{a_1}^{b_1}\ldots\int\limits_{a_n}^{b_n} u(\bar x)\alpha_0(\bar x)dx_1\ldots dx_n=0$, $\forall u\in H$.

Сформульований критерій пов'язує характеризацію найближчого елемента з існуванням визначеної неявно функції.

Теорема 5. *Нехай* $f(\bar x)\in L_{\bar p}\backslash H_n$. *Для того щоб поліном* $P_m^*(\bar x)\in H_n$ *був елементом найкращого (*α, β*)- наближення для функції* $f(\bar x)$, *достатньо та (у випадку* $p=1$ *або* $q=1$ *за умови* $\operatorname{mes}\{\bar x\in K.\ f(\bar x)=P_m^*(\bar x)\}=0$*) необхідно, щоб для функції*

$$\alpha(\bar x)=\begin{cases}| f-P_m^*|_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta}^{p_n-p_{n-1}}\times\ldots\times| f-P_m^*|_{p_1,\alpha,\beta}^{p_2-p_1}\ | f-P_m^*|_{\alpha,\beta}^{p_1-1}\ \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}(f-P_m^*), & \\ & \text{якщо } | f-P_m^*|_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta}^{p_{n-1}}>0\\ 0, & \text{якщо } | f-P_m^*|_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta}^{p_{n-1}}=0\end{cases}$$

та будь-якого полінома $P_m\in H_n$ *мала місце рівність*

$$\int\limits_{a_n}^{b_n}\ldots\int\limits_{a_1}^{b_1}P_m(\bar x)\alpha(\bar x)dx_1\ldots dx_n=0.$$

Доведення. Достатність. Очевидно, що:

$$\|\alpha\|_{\bar q,\alpha^{-1},\beta^{-1}}=\| f-P_m^*\|_{\bar p,\alpha,\beta}^{p_n-1},\quad \int\limits_{a_n}^{b_n}\ldots\int\limits_{a_1}^{b_1}f(\bar x)\alpha(\bar x)dx_1\ldots dx_n=\| f-P_m^*\|_{\bar p,\alpha,\beta}^{p_n}. \tag{4}$$

З твердження випливає, що:

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\ldots\int\limits_{a_n}^{b_n}f(\bar x)\alpha(\bar x)dx_1\ldots dx_n\le E_m(f)_{\bar p,\alpha,\beta}\| f-P_m^*\|_{\bar p,\alpha,\beta}^{p_n-1} \tag{5}$$

Порівнюючи (4) та (5) отримаємо, що $\| f - P_m^* \|_{\bar{p},\alpha,\beta} \le E_m(f)_{\bar{p},\alpha,\beta}$.

Необхідність. Нехай P_m^* – поліном найкращого (α, β)- наближення для функції $f(\bar{x})$ у просторі $L_{\bar{p}}$.Тоді у силу теореми 4, знайдеться функція $\alpha_0(\bar{x}) \in L_{\bar{q}}$. яка задовольняє умови:

$$1)\ \| \alpha_0 \|_{\bar{q},a^{-1},b^{-1}} = 1,$$

$$2)\ \| f - P_m^* \|_{\bar{p},\alpha,\beta} = \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f(\bar{x})\alpha_0(\bar{x})dx_1 \ldots dx_n,$$

$$3)\ \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} P_m(\bar{x})\alpha_0(\bar{x})dx_1 \ldots dx_n = 0, \qquad \forall P_m \in H_n.$$

За лемою 2 умова 2) буде виконуватися для функції

$$\alpha_0(\bar{x}) = \begin{cases} \| f - P_m^* \|_{\bar{p},\alpha,\beta}^{1-p_n} | f - P_m^* |_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta}^{p_n - p_{n-1}} \times \ldots \times | f - P_m^* |_{p_1,\alpha,\beta}^{p_2 - p_1} | f - P_m^* |_{\alpha,\beta}^{p_1 - 1} \times & \\ \times \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}(f - P_m^*), & \text{якщо } | f - P_m^* |_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta}^{p_{n-1}} > 0 \\ 0, & \text{якщо } | f - P_m^* |_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta}^{p_{n-1}} = 0 \end{cases}.$$

Причому за умови даної теореми функція $\alpha_0(\bar{x})$ буде єдиною. Але тоді з умови

3) отримуємо: $$\int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} P_m(\bar{x})\alpha_0(\bar{x})dx_1 \ldots dx_n = 0, \qquad \forall P_m(\bar{x}) \in H_n.$$

Таким чином теорема 5 повністю доведена.

Бібліографічні посилання

1. **Бабенко В.Ф.** Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций /В.Ф. Бабенко // Укр. мат. журн. —Т.34. —№4 —1982. —С. 409 – 416.
2. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения/Н.П. Корнейчук. – М.,—1987. —С. 21 – 24
3. **Смирнов Г.С.** Общий вид линейного функционала и критерий полинома наилучшего приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой /Г.С. Смирнов // Укр. мат. журн. —Т.25. —№1 —1973. —С. 134 – 138.
4. **Трактинская В.Н.** Характеризация элемента наилучшего интегрального приближения функций многих переменных /В.Н. Трактинская // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. —Вип.8. —2007. —С. 134 – 136.
5. **Трактинская В.Н.** Критерий элемента наилучшего несимметричного приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой /В.Н. Трактинская // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. —Вип.3. —1998. —С. 33 – 41.

Надійшла до редколегії 15.01.09

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко

Днепропетровский национальный университет им Олеся Гончара,

Институт прикладной математики и механики НАН Украины

ТЕОРЕМА О ПОПЕРЕЧНИКЕ ШАРА В ПРОСТРАНСТВАХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Доведено теорему про слабкі поперечники кулі у просторах відображень зі значеннями в лінійних нормованих просторах. Наведено приклад застосування цієї теореми.

Важную роль в теории приближений играет введенное А.Н. Колмогоровым [3] понятие поперечника множества в нормированном пространстве, позволяющее сравнивать аппроксимативные свойства подпространств заданной размерности. Напомним соответствующие определения.

Пусть X – линейное нормированное пространство над полем вещественных или чисел, $\mathcal{M} \subset X$ – некоторое множество, G – подпространство пространства X. Наилучшим приближением элемента $f \in X$ подпространством G в метрике пространства X называется величина

$$E(f, G)_X = \inf_{g\in G} \| f-g\|_X , \tag{1}$$

а наилучшим приближением множества $\mathcal{M}$ подпространством G – величина

$$E(\mathcal{M},G)_X = \sup_{f\in\mathcal{M}} E(f,G)_X . \tag{2}$$

Соотношением

$$d_n(\mathcal{M}, X) = \inf_{\dim G=n} E_n(\mathcal{M},G)_X \tag{3}$$

определяется n-поперечник по Колмогорову класса $\mathcal{M}$ в пространстве X. Подпространство G, реализующее inf в правой части (3) называется экстремальным для класса $\mathcal{M}$.

Пусть C и L_p ($1\le p \le \infty$) пространства 2π-периодических функций $f : R \to R$ с соответствующими нормами $\| f\|_C$ и $\| f\|_{L_p} = \|f\|_p$. Через W_p^r ($r=1,2,\ldots;\ 1\le p \le \infty$) обозначим класс функций $f\in C$ таких, что производная $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $\left\|f^{(r)}\right\|_p \le 1$. В [3] Колмогоровым установлено, что

$$d_{2n-1}\left(W_p^r, L_2\right) = \frac{1}{n^r}$$

и экстремальным подпространством является подпространство T_{2n-1}

тригонометрических полиномов порядка не выше n-1. В дальнейшем многие математики изучали задачу вычисления поперечников различных классов функций в различных функциональных пространствах. По поводу изложения известных результатов для классов периодических функций одной переменной и дальнейших ссылок сошлемся на [4 – 6; 8; 9].

Отметим, что при получении оценок снизу поперечников по Колмогорову во многих случаях использовалась следующая теорема о поперечнике шара.

Теорема 1 ([6, с. 342]). *Пусть* X_{n+1} -- (n+1) – *мерное подпространство пространства* X, B – *шар радиуса* ρ *в* X_{n+1}, *т. е.* $B_\rho = \{x \in X_{n+1} : \|x\|_X \le \rho\}$. *Тогда*

$$d_n(B, X) = \rho.$$

Теперь обратимся к задачам аппроксимации функций, значения которых принадлежат заданному линейному нормированному пространству. Пусть Q – некоторое множество и X – некоторое линейное нормированное пространство функций $f : Q \to R$ с нормой $\|\cdot\|_X$. Будем предполагать, что X и $\|\cdot\|_X$ обладают следующими свойствами:

1) $x \in X \Rightarrow |x| \in X$;

2) $\|x\|_X = \||x|\|_X$;

3) $|x| \le |y| \Rightarrow \|x\|_X \le \|y\|_X$.

Отметим, что в качестве X можно взять пространство функций $x : Q \to P$, непрерывных на компакте Q, с нормой $\|x\|_C = \max\limits_{t \in Q} |x(t)|$, а также любую идеальную структуру [7, с. 59]. Пусть также задано линейное нормированное пространство Y. Рассмотрим произвольное линейное пространство L отображений $f : Q \to Y$ таких, что функция $\|f(t)\|_Y$, как функция от переменного $t \in Q$, принадлежит пространству X. Через $L_X(Q, Y)$ будем обозначать пространство L с нормой

$$|||f||| = \|\|f(t)\|_Y\|_X.$$

Рассмотрим два примера.

1. Пусть Q – метрический компакт, Y – произвольное линейное нормированное пространство, L = C(Q,Y) - пространство непрерывных отображений $f : Q \to Y$ с нормой

$$|||f||| = \max\{\|f(t)\|_Y : t \in Q\}.$$

Это пространство получается по описанной выше схеме, как пространство $L_{C(Q)}(Q, Y)$, где C(Q) – пространство числовых функций $f : Q \to R$, непрерывных на компакте Q.

2. Пусть Q – пространство с мерой, $L = L_p(Q,Y)$ $(1 \le p < \infty)$ - множество интегрируемых по Бохнеру функций $f : Q \to R$ с конечной нормой ,

$$|||f||| = \left(\int_Q \|f(t)\|_Y{}^p \, dt \right)^{1/p} .$$

Это пространство получается по описанной выше схеме, как пространство $L_{L_p(Q)}(Q,Y)$, где $L_p(Q)$ – пространство числовых функций $f : Q \to R$, суммируемых в p-й степени на Q.

Задачи аппроксимации функций из $L_X(Q,Y)$ и подмножеств пространства $L_X(Q,Y)$ подпространствами могут быть поставлены аналогично (1) и (2). Пусть G – подпространство в $L_X(Q,Y)$, $f \in L_X(Q,Y)$, $\mathcal{M} \subset L_X(Q,Y)$. Наилучшим приближением функии $f \in L_X(Q,Y)$ подпространством G в метрике пространства $L_X(Q,Y)$ называется величина

$$E(f,G)_{L_X(Q,Y)} = \inf_{h \in G} |||f - g||| , \tag{4}$$

а наилучшим приближением множества $\mathcal{M}$ подпространством G – величина

$$E(\mathcal{M},G)_{L_X(Q,Y)} = \sup_{f \in \mathcal{M}} E(f,G)_{L_X(Q,Y)} .$$

Отметим, что если пространство Y бесконечномерно, то в $L_X(Q,Y)$ даже самые простые подпространства, скажем подпространства констант (постоянных отображений), будут бесконечномерными. По этой причине для сравнения аппроксимативных свойств некоторых совокупностей подпространств пространства $L_X(Q,Y)$ в работе [1] были введены понятия слабой линейной зависимости и независимости элементов этих подпространств, понятие слабой размерности и понятие соответствующих (слабых) поперечников. Напомним эти определения.

Определение 1. Пусть $\{h_k\} \subset L_X(Q,Y)$ - некоторая совокупность элементов. Будем говорить, что элементы $\{h_k\}$ являются слабо линейно зависимыми (или w – линейно зависимыми), если для любого ненулевого функционала $G \in Y^*$ числовые функции $\langle G, h_k \rangle \in X$ являются линейно зависимыми. В противном случае элементы $\{h_k\}$ назовем слабо линейно независимыми.

Определение 2. Пусть G – некоторое линейное подпространство пространства $L_X(Q,Y)$. Будем говорить, что G имеет слабую размерность n и писать w-dim G= n, если

1) найдутся n элементов в G, которые слабо линейно независимы;
2) любые n+1 элементов в G слабо линейно зависимы.

Примером подпространства слабой размерности n в $L_X(Q,Y)$ является совокупность

$$G=\left\{\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)y_k : y_k\in Y\right\},$$

где $\{\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)\}$ – линейно независимые функции из X.

Определение 3. Соотношением

$$d^w{}_n(\mathcal{M}, L_X(Q,Y)) = \inf_{w-\dim G=n} E_n(\mathcal{M}, G)_{L_X(Q,Y)} \tag{4}$$

определяется слабый n-поперечник по Колмогорову класса $\mathcal{M}\subset L_X(Q,Y)$ в пространстве X. Подпространство G, реализующее inf в правой части (4), называется экстремальным для класса $\mathcal{M}$

Пусть $\varphi_1,...,\varphi_{n+1}$ - линейно независимая система функций из X и пусть $G_{n+1}=\text{span}\{\varphi_1,...,\varphi_{n+1}\}$, $B_{n+1\,\rho}=\{g(t)\in G_{n+1}:\|g(t)\|_X\le\rho\},\rho>0$. Для произвольного $y\in Y,\|y\|_Y=1$, положим

$$G^y_{n+1}=\{f\in L_X(Q,Y):f(t)=g(t)\cdot y, g(t)\in G_{n+1}\}$$

и

$$B^y_{n+1,\rho}=\{f\in L_X(Q,Y):f(t)=g(t)\cdot y, g(t)\in H_{n+1},\|g(t)\|_X\le\rho\}$$

Следующая теорема является для слабых поперечников аналогом теоремы о поперечнике шара.

Теорема 2. *Для любого* $n\in N$, *любого* $\rho>0$ *и произвольного* $y\in Y$, $\|y\|_Y=1$,

$$d^w{}_n\left(B^y_{n+1\,\rho},L_X(Q,Y)\right)=\rho.$$

Доказательство. Неравенство

$$d^w{}_n\left(B^y_{n+1,\rho},L_X(Q,Y)\right)\le\rho$$

очевидно. Докажем неравенство

$$d^{w}{}_{n}\left(B^{y}_{n+1,\rho}, L_X(Q,Y)\right) \ge \rho .$$

Возьмем произвольный функционал $F \in Y^*$ такой, что $\|F\|_{Y^*} = 1$ и $\langle F, y\rangle = \|y\|_Y = 1$ (как хорошо известно такой функционал F существует). Отметим, что

$$\langle F, H^{y}_{n+1}\rangle := \{\langle F, g(t)\rangle : g(t) \in G_{n+1}\} -$$

(n+1) - мерное подпространство в X,

$$\langle F, B^{v}_{n+1,\rho}\rangle = \{\langle F, f\rangle : f \in L_X(Q,Y) : f(t) = g(t)\cdot y, g(t) \in G_{n+1}, \|g(t)\|_X \le \rho\} =$$

$$= \{g(t) \in X : \|g(t)\|_X \le \rho\} -$$

шар радиуса ρ в H_{n+1}.

Пусть G_n – подпространство пространства $L_X(Q,Y)$, имеющее слабую размерность не выше n. Рассмотрим подпространство

$$\langle F, H_n\rangle := \{\langle F, h(t)\rangle : h(t) \in G_n\}$$

пространства X, которое в силу определения 2 будет иметь размерность не выше n.

Для любого $f(t) \in B^{y}_{n+1,\rho}$ вида $f(t) = g(t)\cdot y$ будем иметь

$$\inf_{h\in G_n} \|\|f(t) - h(t)\|\| = \inf_{h\in G_n} \left\| \|f(t) - h(t)\|_Y \right\|_X \ge$$

$$\ge \inf_{h\in G_n} \left\| |\langle F, f(t) - h(t)\rangle| \right\|_X = \inf_{h\in G_n} \left\| |\langle F, f(t)\rangle - \langle F, h(t)\rangle| \right\|_X =$$

$$= \inf_{h\in G_n} \left\| |\langle F, y\rangle g(t) - \langle F, h(t)\rangle| \right\|_X = \inf_{u\in\langle F, G_n\rangle_n} \left\| |g(t) - u(t)| \right\|_X .$$

Следовательно,

$$\sup_{f(t)\in B^{y}_{n+1,\rho}} \inf_{h\in G_n} \left\| \|f(t) - h(t)\|_Y \right\|_X \ge \sup_{f(t)\in B^{y}_{n+1,\rho}} \inf_{u\in\langle F, G_n\rangle_n} \left\| |g(t) - u(t)| \right\|_X ,$$

т. е.

$$E\left(B^{y}_{n+1,\rho}, G_n\right)_{L_X(Q,Y)} \ge E\left(B_{n+1,\rho}, \langle F, G_n\rangle\right)_X ,$$

Откуда

$$d_n^w\left(B_{n+1,\rho}^y, L_X(Q,Y)\right) \geq d_n\left(B_{n+1,\rho}, X\right) = \rho$$

(последнее соотношение справедливо в силу теоремы 1). Теорема доказана.

В качестве приложения теоремы 2 найдем точные значения слабых поперечников одного класса отображений в сепарабельное гильбертово пространство H. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|_H$. В пространстве $L_{2\,H}$ =L_2 ([0, 2π], H) интегрируемых по Бохнеру на [0, 2π] 2π – периодических функций $f : R \to H$, для которых

$$\int_0^{2\pi} \| f(t) \|^2 \, dt < \infty,$$

введем скалярное произведение

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} (f(t), g(t)) dt$$

и норму

$$\| f \|_{2,H}^2 := \int_0^{2\pi} (f(t), f(t)) dt = \int_0^{2\pi} \| f(t) \|^2 \, dt .$$

Наилучшим приближением функции $f \in L_2$ ([0, 2π], H) подпространством $G \subset L_2$ ([0, 2π], H) называется величина

$$E(f, G)_{2\,H} = \inf_{g \in G} \| f - g \|_{2,H} ,$$

а наилучшим приближением некоторого класса функций $\mathcal{M} \subset L_2$ ([0, 2π], H) подпространством G – величина

$$E(\mathcal{M}, G)_{2,H} = \sup_{f \in \mathcal{M}} E(f, G)_{2,H} .$$

В качестве G будем использовать множество T_{2n-1}^H обобщенных тригонометрических полиномов порядка n-1 вида

$$T_n(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cos kt + B_k \sin kt, \quad A_k, B_k \in H .$$

Каждой 2π – периодической функции f, принадлежащей L_2 ([0, 2π], H), поставим в соответствие ряд, который называется рядом Фурье данной функции

$$f(t) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kt + B_k \sin kt, \qquad (5)$$

где

$$A_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad B_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad k \in N \cup \{0\}.$$

Известно, [10, § 5.4.9] что для функций $f \in L_2([0,2\pi], H)$ имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \| f(t) \|^2 \, dt = \frac{1}{2}\|A_0\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \| A_k \|^2 + \| B_k \|^2 .$$

Кроме того

$$E^2 (f, T^H_{2n-1})_{2,H} = \| f - s_n(f) \|_2^2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} \| A_k \|^2 + \| B_k \|^2 , \qquad (6)$$

где $s_n(f;t)$ – частная сумма порядка n-1 ряда (5).

Пусть задана числовая последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in N}$ такая, что $|\lambda_k| \le |\lambda_{k+1}|, k \in N$, и $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Через W^Λ обозначим класс элементов из $f \in L_2([0,2\pi], H)$ таких, что

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left(\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2\right) \le 1.$$

Имеет место теорема.

Теорема 3. *Для произвольного* $n \in N$

$$d^w_{2n-1}\left(W^\Lambda, L_2([0,2\pi], H)\right) = |\lambda_n|^{-1}.$$

Доказательство. Имеем для любой функции $f \in W^\Lambda$

$$E^2 (f, \Gamma^H_{2n-1})_{2,H} = \| f - s_n(f) \|_2^2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} \left(\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2\right)$$

$$= \pi \sum_{k=n}^{\infty} \left(\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2\right) \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2} \le \lambda_{|n|}^{-2} \pi \sum_{k=n}^{\infty} \left(\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2\right) \lambda_k^2 \le \lambda_n^{-2},$$

откуда следует нужная оценка сверху для поперечника

$$d_{n-1}^{w}\left(W^{\wedge}, L_2([0,2\pi], H)\right) \le |\lambda_n|^{-1}.$$

Для получения оценки снизу заметим, что для любого тригонометрического полинома вида

$$T_n(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kt + B_k \sin kt, \quad A_к, B_k \in H,$$

будет

$$\pi \sum_{k=1}^{n} \left(\|A_k\|^2 + \|B_k\|^2\right) \lambda_k^{2} \le \pi \lambda_n^{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\|A_k\|^2 + \|B_k\|^2\right) = \lambda_n^{2} \|T_n\|_{2,H}^2,$$

Так что шар радиуса $|\lambda_n|^{-1}$ в подпространстве T_{2n+1}^{H} слабой размерности 2n+1 пространства $L_2([0,2\pi], H)$ содержится в классе $W^{\wedge}$. В силу теоремы 2 получим

$$d_{n-1}^{w}\left(W^{\wedge}, L_2([0,2\pi[0H)\right) \ge |\lambda_n|^{-1}.$$

Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В. Ф.** Аппроксимация непрерывных вектор-функций / В. Ф. Бабенко, С.А.Пичугов // Укр. мат. журн. 1994. Т.46, № 11. С. 1435-1448.
2. **Дороговцев А. Я.** Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем – К., 1992, 320 с.
3. **Колмогоров А. Н.** О наилучшем приближении функций заданного функционального класса/ А. Н. Колмогоров, Избранные труды. Математика, механика – М., 1985, С. 186 – 189.
4. **Корнейчук Н. П.** Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук – М., 1976, 320 с.
5. **Корнейчук Н. П.** Сплайны в теории приближения / Н. П. Корнейчук – М., 1984, 352 с.
6. **Корнейчук Н. П.** Точные константы в теории приближений / Н. П. Корнейчук – М., 1987, 424 с.
7. **Крейн С. Г.** Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов – М., 1978, 400 с.
8. **Тихомиров В. М.** Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров – М., Изд-во МГУ, 1976, 304 с.
9. **Pinkus A.** n-widths in approximation theory, Berlin, Springer-verlag, 1985, 291 p.

Надійшла до редколегії 05.02.09

УДК 517.5

В.Ф. Бабенко*,**, Р.О. Биличенко*

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

** Институт прикладной математики и механики НАН Украины

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ, ЗАДАВАЕМЫХ СТЕПЕНЯМИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ДРУГИМИ КЛАССАМИ

Для степенів $k<r$ самоспряженого оператора A, що діє в гільбертовому просторі H, знайдено найкраще наближення класу елементів, таких, що $\|A^k x\| \le 1$, класами елементів, для яких $\|A^r x\| \le N$, $N>0$.

Пусть X – линейное нормированное пространство, B – некоторое множество в X и $x \in X$. Величину

$$E(x,B)_X = \inf_{b\in B} \|x-b\|_X ,$$

где $\|\cdot\|_X$ – норма в пространстве X, будем называть *наилучшим приближением элемента* $x \in X$ *множеством* $B \subset X$.

Пусть F,Q – выпуклые классы элементов в X и $N>0$ – некоторое число. Множество $NQ=\{Nx : x\in Q\}$ будем называть *гомотетом класса* Q *с коэффициентом гомотетии* N. Величину

$$E(F,NQ)_X = \sup_{u\in F} E(u,NQ)_X = \sup_{u\in F} \inf_{x\in NQ} \|u-x\|_X \qquad (1)$$

будем называть *наилучшим приближением класса* F *гомотетом* NQ.

Задача наилучшего приближения класса F гомотетом NQ состоит в вычислении величины (1).

Задача приближения класса классом тесно связана с неравенствами типа Колмогорова [2, §§ 7.3 – 7.5; 3; 5].

Через $L^r_{2,2}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим пространство всех функций $x \in L_2(\mathbb{R})$, $(r-1)$-я производная которых локально абсолютно непрерывна и r-я производная принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$. Через $W^r_{2,2}(\mathbb{R})$ обозначим множество $\left\{x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R}) : \left\|x^{(r)}\right\|_2 \le 1\right\}$.

Для оператора дифференцирования $A=\dfrac{d^k}{dt^k}$ наилучшее приближение класса $F=W^{r-k}_{2,2}(\mathbb{R})$ гомотетом класса $Q=W^r_{2,2}(\mathbb{R})$ с коэффициентом гомотетии $N>0$ в пространстве L_2 найдено Ю.Н. Субботиным и Л.В. Тайковым [6] в 1968 году. Ими доказано, что в этом случае

$$E(F,NQ)=\frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}.$$

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением (x,y) и нормой $\|x\|=(x,x)^{1/2}$; A – линейный, неограниченный, самосопряженный оператор в H; $D(A)$ – область его определения; k,r – натуральные числа $(k<r)$. Мы будем рассматривать задачу наилучшего приближения класса $F=WD\left(A^{r-k}\right)=\left\{u\in D\left(A^{r-k}\right):\left\|A^{r-k}u\right\|\le 1\right\}$ гомотетом класса $Q=WD\left(A^{r}\right)=\left\{x\in D\left(A^{r}\right):\left\|A^{r}x\right\|\le 1\right\}$ с коэффициентом гомотетии $N>0$, которая состоит в вычислении величины

$$E(F,NQ)=\sup_{u\in F}\inf_{\upsilon\in NQ}\|u-\upsilon\|=\sup_{\left\|A^{r-k}u\right\|\le 1}\inf_{\left\|A^{r}\upsilon\right\|\le 1}\|u-\upsilon\|. \qquad (2)$$

Приведем некоторые сведения из спектральной теории самосопряженных операторов [1, §§ 67, 75, 88].

Разложением единицы называется однопараметрическое семейство проектирующих операторов E_t, заданное в конечном или бесконечном интервале $[\alpha,\beta]$ (если интервал $[\alpha,\beta]$ бесконечен, то, по определению, принимается $E_{-\infty}=\lim\limits_{t\to-\infty}E_t$, $E_{\infty}=\lim\limits_{t\to\infty}E_t$, в смысле сильной сходимости) и удовлетворяющее следующим условиям:

а) $E_uE_v=E_s \quad \forall u,v\in[\alpha;\beta]$, где $s=\min\{u,v\}$,

б) в смысле сильной сходимости

$$E_{t-0}=E_t \qquad (\alpha<t<\beta),$$

в) $E_\alpha=0$, $E_\beta=I$ (I — тождественный оператор: $Ix=x\ \forall x\in H$).

Полагаем $E_t=0$ при $t\le\alpha$ и $E_t=I$ при $t\ge\beta$.

Согласно спектральной теореме каждому самосопряженному оператору A соответствует разложение единицы E_t, $t\in\mathbb{R}$, которое называется разложением единицы, порожденным оператором A, такое, что имеет место равенство

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}t\,dE_t,$$

которое называется спектральным разложением оператора A.

Приведенный здесь интеграл – это операторный интеграл Стилтьеса [1, § 72].

Вектор x принадлежит $D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^2d(E_tx,x)<\infty.$$

При этом, если $x\in D(A)$, то

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t x$$

и

$$\|Ax\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t x, x).$$

Для произвольной степени A^k $(k = 1, 2, ..., n)$ оператора спектральное разложение имеет вид

$$A^k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k dE_t$$

и при этом

$$\|A^k x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} d(E_t x, x).$$

Последнее равенство выполняется для всех $x \in H$ таких, что при $k = 1, 2, ..., n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} d(E_t x, x) < \infty.$$

Функцией $\varphi(A)$ от оператора A называется оператор, определяемый формулой

$$\varphi(A)x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dE_t x \tag{3}$$

на всех тех векторах $x \in H$, для которых выполнено соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 d(E_t x, x) < \infty.$$

При этом

$$\|\varphi(A)x\|^2 = \int_{\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 d(E_t x, x).$$

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема, известная как теорема двойственности для наилучшего приближения [4, гл.3].

Теорема 1. *Пусть* X *– линейное нормированное пространство,* X^* *– пространство сопряженное к* X, $F \subset X$ *– выпуклое подмножество,* $x \in X$. *Тогда*

$$E(x, F)_X = \sup_{\|f\|_{X^*} \le 1} \left\{ f(x) - \sup_{u \in F} f(u) \right\}. \tag{4}$$

При этом существует функционал $f_0 \in X^*$, *реализующий точную верхнюю грань в правой части* (4).

Результаты данной работы существенным образом опираются также на следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* A *– самосопряженный, в общем случае неограниченный, оператор в гильбертовом пространстве* H *и пусть* $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$. *Тогда для любого* $N > 0$ *и любого* $x \in D(A^r)$ *справедливо неравенство*

$$\left\|A^k x\right\| \le N^{(k-r)/k} \frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k} \cdot \left\|A^r x\right\| + N\|x\|. \qquad (5)$$

Если оператор A *таков, что для любых действительных* s, t, *таких, что* $0 \le s < t \le \infty$, *справедливо*

$$(E_t - E_s) D\left(A^{2r}\right) \ne \{\theta\}, \qquad (6)$$

то для любого $N > 0$ *данное неравенство является точным.*

Замечание 1. Аддитивное неравенство (5) можно непосредственно получить из известного мультипликативного неравенства [2, §5.1]

$$\left\|A^k x\right\| \le \|x\|^{1-\frac{k}{r}} \left\|A^r x\right\|^{\frac{k}{r}},$$

используя неравенство Юнга

$$a \cdot b \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p > 1.$$

В данном случае мы приведем иной способ получения неравенства (5), с целью выяснения условий, при которых неравенство является точным для любого $N > 0$. Также, приведенное ниже доказательство теоремы 2 является наглядной иллюстрацией применения элементов спектральной теории самосопряженных операторов, которые используются для получения основного результата заметки.

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждений из [6]. Пусть E_t – разложение единицы, соответствующее оператору A так, что

$$A \doteq \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE_t .$$

Рассмотрим функцию от оператора $\varphi_N(t)$, где

$$\varphi_N(t) = \begin{cases} t^k - \operatorname{sgn}\left\{t^{r-k}\right\} t^r \cdot \dfrac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}, & |t| \le N^{1/k} \cdot \left(\dfrac{k}{r}\right)^{1/(k-r)} \left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{-1/k}, \\ 0, & |t| \le N^{1/k} \cdot \left(\dfrac{k}{r}\right)^{1/(k-r)} \left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{-1/k}. \end{cases} \qquad (7)$$

Для $x \in D\left(A^r\right)$ справедлива оценка

$$\left\|A^k x\right\| \le \left\|A^k x - \varphi_N(A) x\right\| + \left\|\varphi_N(A) x\right\|. \qquad (8)$$

Рассмотрим $\left\|A^k x - \varphi_N(A) x\right\|$. Будем иметь

$$\left\|A^k x-\varphi_N(A)x\right\|=\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left(t^k-\varphi_N(t)\right)dE_t x\right\|=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(t^k-\varphi_N(t)\right)^2 d(E_t x,x)\right)^{1/2}\le$$

$$\le\max_t\left|\frac{t^k-\varphi_N(t)}{t^r}\right|\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}t^{2r}d(E_t x,x)\right)^{1/2}=\frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}\left\|A^r x\right\|. \tag{9}$$

Равенство

$$\max_t\left|\frac{t^k-\varphi_N(t)}{t^r}\right|=\frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}.$$

проверяется непосредственным вычислением.

Теперь рассмотрим $\left\|\varphi_N(A)x\right\|$. Будем иметь

$$\left\|\varphi_N(A)x\right\|=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi_N(t)\right|^2 d(E_t x,x)\right\}^{1/2}\le$$

$$\le\max_t\left|\varphi_N(t)\right|\left\{\int_{-\infty}^{\infty}d(E_t x,x)\right\}^{1/2}=\max_t\left|\varphi_N(t)\right|\left\|x\right\|.$$

Так как

$$\max_t\left|\varphi_N(t)\right|=N,$$

то

$$\left\|\varphi_N(A)x\right\|\le N\left\|x\right\|. \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим (5).

Покажем теперь, что при выполнении (6) неравенство (5) является точным. Предположим противное. Пусть существует $\delta>0$ такое, что справедливо неравенство

$$\left\|A^k x\right\|\le(1-\delta)N^{(k-r)/k}\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}\cdot\left\|A^r x\right\|+N\left\|x\right\|. \tag{11}$$

Выберем элемент $x\in(E_t-E_s)D\left(A^{2r}\right)$ и пусть для произвольного $\varepsilon\in(0;1)$ $t=N^{1/k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{-1/k}$ и $s=(1-\varepsilon)t$. Так как $x\in(E_t-E_s)D\left(A^{2r}\right)$, то

$$\left\|x\right\|^2=\int_s^t d(E_u x,x).$$

Для выбранного x будем также иметь

$$\left\|A^k x\right\|^2=\left(A^k x,A^k x\right)=\left(A^{2k}x,x\right)=\int_s^t u^{2k}d(E_u x,x)\ge s^{2k}\left\|x\right\|^2=(1-\varepsilon)^{2k}t^{2k}\left\|x\right\|^2$$

и

$$\left\|A^r x\right\|^2=\left(A^r x, A^r x\right)=\left(A^{2r}x,x\right)=\int\limits_s^t u^{2r}d\left(E_u x,x\right)\le t^{2r}\left\|x\right\|^2 .$$

Таким образом

$$\left\|A^k x\right\|\ge(1-\varepsilon)^k N\left(1-\frac{k}{r}\right)^{-1}\left\|x\right\| \tag{12}$$

и

$$\left\|A^r x\right\|\le N^{r/k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{-r/k}\left\|x\right\| . \tag{13}$$

Подставим (12) и (13) в неравенство (11)

$$(1-\varepsilon)^k N\left(1-\frac{k}{r}\right)^{-1}\left\|x\right\|\le(1-\delta)N\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{-1}\left\|x\right\|+N\left\|x\right\| .$$

В силу произвольности ε

$$1\le(1-\delta)\frac{k}{r}+1-\frac{k}{r}=1-\delta\frac{k}{r} .$$

Поскольку $\delta>0$, то последнее неравенство, а значит и (11), не выполняется. Поэтому коэффициент в первом слагаемом правой части неравенства (5) нельзя уменьшить. Следовательно (5) является точным. Теорема полностью доказана.

Замечание 2. Если неравенство (5) является точным, то

$$\sup_{\left\|A^r x\right\|\le 1}\left(\left\|A^k x\right\|-N\left\|x\right\|\right)=N^{(k-r)/k}\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k} .$$

Перейдем к изложению основного результата данной заметки. Следующая теорема дает решение задачи наилучшего приближения класса $F=WD\left(A^{r-k}\right)$ гомотетом $NQ=NWD\left(A^r\right)$.

Теорема 3. *Пусть* $k,r\in\mathbb{N}$, $k<r$, *и* A – *неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве* H. *Тогда для любого* $N>0$

$$E\left(WD\left(A^{r-k}\right),NWD\left(A^r\right)\right)\le\frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}} . \tag{14}$$

Если оператор A *таков, что выполнено условие* (6), *то для любого* $N>0$

$$E\left(WD\left(A^{r-k}\right),NWD\left(A^r\right)\right)=\frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}} . \tag{15}$$

Доказательство. Пусть E_t – разложение единицы, порожденное оператором A, так что

$$A=\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\,dE_t .$$

Выберем произвольный элемент $x\in D\left(A^{r-k}\right)$ и подействуем на него функцией от оператора $\varphi(A)$, где

$$\varphi(t)=\begin{cases} 1-\operatorname{sgn}\{t^{r-k}\}t^{r-k}\cdot\dfrac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}, & |t|\le N^{1/k}\cdot\left(\dfrac{k}{r}\right)^{1/(k-r)}\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{-1/k}, \\ 0, & |t|\le N^{1/k}\cdot\left(\dfrac{k}{r}\right)^{1/(k-r)}\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{-1/k}. \end{cases} \tag{16}$$

Используя спектральное разложение (3), несложно проверить, что

$$A^r\varphi(A)x=\int_{-\infty}^{\infty}t^r\varphi(t)dE_tx.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|A^r\varphi(A)x\|&=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}t^{2r}|\varphi(t)|^2 d(E_tx,x)\right\}^{1/2}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}t^{2k}|\varphi(t)|^2 t^{2(r-k)}d(E_tx,x)\right\}^{1/2}\le \\ &\le\max_t|t^k\varphi(t)|\left\{\int_{-\infty}^{\infty}t^{2(r-k)}d(E_tx,x)\right\}^{1/2}=\max_t|t^k\varphi(t)|\|A^{r-k}x\|\le N,\end{aligned} \tag{17}$$

так как $\|A^{r-k}x\|\le 1$. Равенство

$$\max_t|t^k\varphi(t)|=N$$

проверяется непосредственным вычислением. Из (17) следует, что $\varphi(A)x\in NWD(A^r)$.

Далее

$$x-\varphi(A)x=\int_{-\infty}^{\infty}(1-\varphi(t))dE_tx$$

и

$$\begin{aligned}\|x-\varphi(A)x\|&=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|1-\varphi(t)|^2 d(E_tx,x)\right\}^{1/2}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|1-\varphi(t)|^2}{t^{2(r-k)}}\cdot t^{2(r-k)}d(E_tx,x)\right\}^{1/2}\le \\ &\le\max_t\left|\frac{1-\varphi(t)}{t^{r-k}}\right|\left\{\int_{-\infty}^{\infty}t^{2(r-k)}d(E_tx,x)\right\}^{1/2}=\max_t\left|\frac{1-\varphi(t)}{t^{r-k}}\right|\|A^{r-k}x\|\le\frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}.\end{aligned} \tag{18}$$

Равенство

$$\max_t\left|\frac{1-\varphi(t)}{t^{r-k}}\right|=\frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}$$

проверяется непосредственным вычислением.

Из (18) и (2) следует (14).

С другой стороны, по теореме 2

$$E\left(WD\left(A^{r-k}\right), NWD\left(A^{r}\right)\right) = \sup_{\left\|A^{r-k}x\right\|\le 1} \sup_{\|h\|\le 1} \left\{ \langle h, x\rangle - N \sup_{\left\|A^{r}u\right\|\le 1} \langle h, u\rangle \right\}.$$

Учитывая, что область определения и область значения самосопряженного оператора плотны в гильбертовом пространстве [1, §§ 44, 46], будем иметь

$$E\left(WD\left(A^{r-k}\right), NWD\left(A^{r}\right)\right) \ge \sup_{\left\|A^{r-k}x\right\|\le 1} \sup_{\left\|A^{r}\upsilon\right\|\le 1} \left\{ \left\langle A^{r}\upsilon, x\right\rangle - N \sup_{\left\|A^{r}u\right\|\le 1} \left\langle A^{r}\upsilon, u\right\rangle \right\} =$$

$$= \sup_{\left\|A^{r}\upsilon\right\|\le 1} \left\{ \sup_{\left\|A^{r-k}x\right\|\le 1} \left\langle A^{r}\upsilon, x\right\rangle - N \sup_{\left\|A^{r}u\right\|\le 1} \left\langle A^{r}\upsilon, u\right\rangle \right\} =$$

$$\sup_{\left\|A^{r}\upsilon\right\|\le 1} \left\{ \sup_{\left\|A^{r-k}x\right\|\le 1} \left\langle A^{k}\upsilon, A^{r-k}x\right\rangle - N \sup_{\left\|A^{r}u\right\|\le 1} \left\langle \upsilon, A^{r}u\right\rangle \right\} = \sup_{\left\|A^{r}\upsilon\right\|\le 1} \left\{ \left\|A^{k}\upsilon\right\| - N\|\upsilon\| \right\}.$$

Пусть теперь для оператора A выполняется (6). Тогда по теореме 2 для всех $x \in D\left(A^{r}\right)$ справедливо точное неравенство (5). Используя замечание 2, будем иметь

$$E\left(WD\left(A^{r-k}\right), NWD\left(A^{r}\right)\right) \ge \sup_{\left\|A^{r}\upsilon\right\|\le 1} \left\{ \left\|A^{k}\upsilon\right\| - N\|\upsilon\| \right\} = \frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}. \qquad (19)$$

Из (19) и (14) следует (15). Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Ахиезер Н.И.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман – М., 1966 – 544 с.
2. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов – К., 2003 – 590 с.
3. **Корнейчук Н.П.** Неравенства для дифференцируемых периодических функций и наилучшее приближение одного класса функций другим / Н.П. Корнейчук // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1972. – 36, № 2. – С. 423 – 434.
4. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук - М., 1976 – 320 с.
5. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций / Н.П. Корнейчук // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – 35, № 1. – С. 93-124.
6. **Субботин Ю.Н.** Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2 / Ю.Н. Субботин, Л.В. Тайков // Мат. заметки. – 1968. – 3, № 2. – С. 157 - 164.

Надійшла до редколегії 12.12.08

УДК 517.5

В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО АДАМАРУ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ПОЛУОСИ

Одержано нові точні нерівності для дробових похідних за Адамаром для функцій, визначених на півосі.

Точные неравенства типа Колмогорова, оценивающие нормы промежуточных производных через нормы самой функции и ее старшей производной, играют важную роль во многих областях математики. Известно большое количество результатов такого типа для производных целых порядков [1–3]. В то же время, для решения широкого круга задач анализа и приложений необходимы исследования производных дробных порядков. Неравенства типа Колмогорова в случае дробных производных изучены в значительно меньшей степени и, главным образом, для дробных производных в смысле Римана-Лиувилля [6, с. 85] и Маршо [6, с. 95]. Некоторые известные точные неравенства типа Колмогорова для таких производных можно найти в [4;5; 7 – 9].

Дробные производные по Адамару [6, с.252] порядка $\alpha\in(0,1)$ функции $f:R_+\to R$ определяются формулами:

$$(D_+^\alpha f)(x):=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1\frac{f(x)-f(xt)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t},$$

$$(D_-^\alpha f)(x):=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^\infty\frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_1^\infty\frac{f(x)-f(xt)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}.$$

Через $C(R_+)=C(0,+\infty)$ будем обозначать пространство всех непрерывных и ограниченных функций $f:R_+\to R$ с нормами

$$\|f\|_{C(R_+)}:=\sup_{x\in R_+}|f(x)|,$$

а через $L_\infty(R_+)$ – пространство измеримых функций $f:R_+\to R$ таких, что

$$\|f\|_{L_\infty(R_+)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in R_+}|f(x)| < +\infty .$$

Пусть еще $L^1_\infty(R_+)$ – это множество локально абсолютно непрерывных функций $f \in C(R_+)$ таких, что $f' \in L_\infty(R_+)$.

В данной работе мы получим точные неравенства типа Колмогорова, оценивающие производные по Адамару $|(D^\alpha_\pm f)(x)|$ функций $f \in L^1_\infty(R_+)$ через $\|f\|_{C(R_+)}$ и $\|f'\|_{L_\infty(R_+)}$.

Теорема. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$. *Для любой функции* $f \in L^1_\infty(R_+)$ *и любого* $x \in R_+$ *справедливо точное неравенство*

$$\left|(D^\alpha_+ f)(x)\right| \le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\|f\|_{C(R_+)}|\ln h|^{-\alpha} + x\|f'\|_{L_\infty(R_+)}\int_h^1\left(|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha}\right)dt\right), \quad (1)$$

если $0 < h < 1$, *и точное неравенство*

$$\left|(D^\alpha_- f)(x)\right| \le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\|f\|_{C(R_+)}|\ln h|^{-\alpha} + x\|f'\|_{L_\infty(R_+)}\int_1^h\left((\ln t)^{-\alpha} - (\ln h)^{-\alpha}\right)dt\right), \quad (2)$$

если $h > 1$.

Неравенства (1) и (2) обращаются в равенства для функций

$$g^+_{x,h}(u) = \begin{cases} \dfrac{(h-1)x}{2}, & 0 < u < hx, \\ u - \dfrac{(1-h)x}{2}, & hx \le u \le x, \\ \dfrac{(1-h)x}{2}, & u > x \end{cases} \quad и \quad g^-_{x,h}(u) = \begin{cases} \dfrac{(h-1)x}{2}, & 0 < u < x, \\ \dfrac{(h-1)x}{2} - u, & x \le u \le hx, \\ \dfrac{(1-h)x}{2}, & u > hx \end{cases}$$

соответственно.

Доказательство. Проведем доказательство для случая $(D^\alpha_+ f)$. Для произвольного $x \in R_+$ и $0 < h < 1$ имеем

$$\left|(D_{+}^{\alpha}f)(x)\right| = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\int_0^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\left|\int_0^h \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| + \left|\int_h^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right|\right). \tag{3}$$

Сначала оценим первое слагаемое в (3).

$$\left|\int_0^h \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le 2\|f\|_{C(R_+)}\int_0^h \frac{1}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} = \frac{2\|f\|_{C(R_+)}\,|\ln h|^{-\alpha}}{\alpha}. \tag{4}$$

Для оценки второго слагаемого в (3) сначала отметим, что

$$f(x)-f(tx) = \int_{tx}^{x} f'(u)du .$$

Тогда

$$\left|\int_h^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| = \left|\int_h^1\int_{tx}^{x} \frac{f'(u)du}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le$$

$$\le \|f'\|_{L_\infty(R_+)}x\int_h^1 \frac{(1-t)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} = \frac{x\|f'\|_{L_\infty(R_+)}}{\alpha}\int_h^1\left(|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha}\right)dt. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в (3), для каждого $x \in R_+$ и $0 < h < 1$ получим неравенство (1).

Пусть $x \in R_+$ и $0 < h < 1$, имеем:

$$\left\|g_{x,h}^{+}\right\|_{C(R_+)} = \frac{1-h}{2}x$$

и

$$\left\|\left(g_{x,h}^{+}\right)'\right\|_{L_\infty(R_+)} = 1.$$

Далее

$$\left|(D_+^\alpha g_{x,h}^+)(x)\right| = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^1 \frac{g_{x,h}^+(x)-g_{x,h}^+(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^h \frac{g_{x,h}^+(x)-g_{x,h}^+(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} + \int_h^1 \frac{g_{x,h}^+(x)-g_{x,h}^+(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left((1-h)x\int_0^h \frac{dt}{|\ln t|^{1+\alpha}t} + x\int_h^1 \frac{(1-t)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{(1-h)x}{\alpha}|\ln h|^{-\alpha} + \frac{x}{\alpha}\int_h^1 \left(|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha}\right)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\left\|g_{x,h}^+\right\|_{C(R_+)}|\ln h|^{-\alpha} + x\left\|g_{x,h}^+\right\|_{L_\infty(R_+)}\int_h^1 \left(|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha}\right)dt\right).$$

Таким образом, для любых $x \in R_+$ и $0 < h < 1$ функция $g_{x,h}^+$ обращает неравенство (1) в равенство.

Рассмотрим теперь случай $(D_-^\alpha f)$. Для произвольного $x \in R_+$ и $h > 1$, действуя, как и при оценке $\left|(D_+^\alpha f)(x)\right|$, имеем

$$\left|(D_-^\alpha f)(x)\right| = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\int_1^\infty \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\left|\int_1^h \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| + \left|\int_h^\infty \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right|\right). \qquad (6)$$

Сначала оценим второе слагаемое в (6).

$$\left|\int_h^\infty \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le 2\|f\|_{C(R_+)}\int_h^\infty \frac{dt}{(\ln t)^{1+\alpha}t} = \frac{2\|f\|_{C(R_+)}}{\alpha}(\ln h)^{-\alpha}. \qquad (7)$$

Теперь перейдем к оценке первого слагаемого.

$$\left|\int_1^h \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| = \left|\int_1^h\int_{tx}^x \frac{f'(u)du}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le$$

$$\le \|f'\|_{L_\infty(R_+)} x \int_1^h \frac{(t-1)}{(\ln t)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} = \frac{x\|f'\|_{L_\infty(R_+)}}{\alpha} \int_1^h \left(|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha} \right) dt. \qquad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), для каждого $x \in R_+$ и $h > 1$ получим неравенство (2).

Аналогично доказательству точности неравенства (1) проверяется, что неравенство (2) при любых $x \in R_+$ и $h > 1$ обращается в равенство для функции $\bar{g}_{x,h}$.

Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи/ В.В. Арестов// Усп. мат. наук – 1996. – 51, № 6. – С. 88 – 124.
2. **Арестов В.В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными/ В.В. Арестов, В.Н. Габушин// Известия вузов. Математика. 1995. – № 11. С. 44 – 66.
3. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения/ В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов – К., 2003. – 590 с.
4. **Бабенко В.Ф.** Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку/ В.Ф. Бабенко, М.Г. Чурілова// Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2001, вип.. 6. – С. 16 – 20.
5. **Гейсберг С.П.** Обощение неравенства Адамара. Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций/ С.П. Гейсберг// Сб. Науч. Тр. ЛМИ. – 1965. – 50. – С.42 – 54.
6. **Самко С.Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев – Минск, 1987. – 650 с.
7. **Чурілова М.С.** Нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку та їх застосування в теорії апроксимації: дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук/ М.С. Чурілова – Д., 2006. – 150 с.
8. **Arestov V.V.** Inequalities for fractional derivatives on the half-line/ V.V. Arestov// Approximation theory, Banach center publications– 1979. – Vol. 4. – P. 19 – 34.
9. **Magaril-Il'yaev G.G.** On the Kolmogorov for fractional derivatives on the half-line/ G.G. Magaril-Il'yaev, V.M. Tikhomirov// Anal. Math. – 1981. – Vol. 7, № 1. – P. 37 – 47.

Надійшла до редколегії 15 02 09

УДК 517.5

С. Б. Вакарчук*, М. Б. Вакарчук**

**Днепропетровский университет экономики и права*

***Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*

О НАИЛУЧШЕМ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ НА ПРЯМОЙ

Одержано нерівності типу Джексона для найкращих середньоквадратичних наближень диференційованих функцій цілими функціями скінченого ступеня на прямій.

Под $L_2 := L_2(R)$, где $R := \{x : -\infty < x < \infty\}$, понимаем пространство всех измеримых на R функций f, для которых

$$\|f\| := \|f\|_{L_2(R)} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty .$$

Через $L_2^r := L_2^r(R)$, $r \in N$, обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные (r−1)-го порядка $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} \equiv f)$ локально абсолютно непрерывны и $f^{(r)} \in L_2$. Символом $B_{\sigma,2}$, $0 < \sigma < \infty$, обозначим сужение на R множества всех целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству L_2. Величину

$$A_\sigma(f) := \inf\left\{\|f - g_\sigma\| : g_\sigma \in B_{\sigma,2}\right\}, \; 0 < \sigma < \infty ,$$

называют наилучшим приближением элемента $f \in L_2$ множеством $B_{\sigma,2}$ Для произвольного класса $M \in L_2$ полагаем

$$A_\sigma(M) := \sup\{A_\sigma(f) : f \in M\}.$$

Модулем непрерывности k-го порядка функции $f \in L_2$ называют величину

$$\omega_k(f,t) := \sup\left\{\|\Delta_h^k f(\cdot)\| : |h| \le t\right\}, \; 0 < t < \infty ,$$

где $\Delta_h^k := \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} f(x + jh)$ −конечная разность k-го порядка функции f в точке x с шагом h.

Впервые вопросы аппроксимации функций на прямой R начал изучать С. Н. Бернштейн, использовавший для этого в качестве аппарата приближения пространства целых функций конечной степени. Различные аспекты данной проблемы в последующем нашли свое отражение в работах Н. И. Ахиезера, С. Н. Никольского, А. Ф. Тимана, И. И. Ибрагимова, Ф. Г. Насибова, В. Ю. Попова, Г. Г. Магарил-Ильяева и многих других.

Основным утверждением данной статьи является следующая теорема

Теорема. *Для любых* $0 < t \le \pi/(2\sigma)$ *и произвольных* $k \in N$ и $r \in Z_+$ *имеют место следующие равенства*

$$\sup\left\{\frac{\sigma^{2r}A_\sigma^2(f)}{\left(\int\limits_0^t \omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)d\tau\right)^k} : f \in L_2^r\right\} = \left\{2t\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-k} \tag{1}$$

Если $0 < t \le \pi/\sigma$, *то справедливы следующие неравенства*

$$\frac{1}{\sigma^{2r}(\sigma t)^{2k}} \le \sup\left\{\frac{A_\sigma^2(f)}{\omega_k^2(f^{(r)},t)} : f \in L_2^r\right\} \le \frac{1}{\sigma^{2r}}\left\{\frac{1}{(\sigma t)^2}+\frac{1}{2}\right\}^k. \tag{2}$$

В случае r=0 $L_2^0 \equiv L_2$ *и* sup *вычисляется по всем функциям* $f \in L_2$, *которые не эквивалентны нулю.*

Доказательство. Известно [3] – [4], что для произвольного элемента $f \in L_2$ существует единственная целая функция $\Lambda_\sigma(f) \in B_{\sigma,2}$, которая наименее уклоняется от f в метрике пространства L_2 и имеет вид

$$\Lambda_\sigma(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\tau}\chi_\sigma(\tau)F(f,\tau)d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{ix\tau}F(f,\tau)d\tau,$$

где F(f)– преобразование Фурье функции f, χ_σ–характеристическая функция множества $(-\sigma,\sigma)$. Для квадрата наилучшего среднеквадратичного приближения функции $f \in L_2$ множеством $B_{\sigma,2}$ запишем [5]

$$A_\sigma^2(f) = \inf\left\{\left\|f(\cdot) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{i(\cdot)\tau}\gamma(\tau)d\tau\right\|^2 : \gamma \in L_2(-\sigma,\sigma)\right\} = \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} |F(f,\tau)|^2 d\tau. \tag{3}$$

Рассмотрим произвольную функцию f, которая принадлежит множеству L_2^r. Поскольку

$$\Delta_h^k f^{(r)}(x) = \frac{i^r}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau^r(e^{i\tau h}-1)^k F(f,\tau)e^{i\tau x}d\tau,$$

то в силу равенства Парсеваля получаем

$$\left\|\Delta_h^k f^{(r)}(\cdot)\right\|^2 = 2^k\left\|\tau^r F(f,\tau)(1-\cos\tau h)^{k/2}\right\|^2 =$$

$$= 2^k\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau^{2r}|F(f,\tau)|^2(1-\cos\tau h)^k d\tau. \tag{4}$$

Используя (3), имеем

$$A_\sigma^2(f) - \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} |F(f,\tau)|^2 \cos\tau h d\tau =$$

$$= \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} |F(f,\tau)|^{2-2/k} |F(f,\tau)|^{2/k} (1-\cos\tau h) d\tau . \qquad (5)$$

Применив к правой части равенства (5) неравенство Гельдера и воспользовавшись определением модуля непрерывности k-го порядка и формулой (4), запишем

$$A_\sigma^2(f) - \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} |F(f,\tau)|^2 \cos\tau h d\tau \le$$

$$\le \left\{ \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} |F(f,\tau)|^2 d\tau \right\}^{1-1/k} \left\{ \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} |F(f,\tau)|^2 (1-\cos\tau h)^k d\tau \right\}^{1/k} \le$$

$$\le A_\sigma^{2-2/k}(f) \left\{ \frac{1}{\sigma^{2r}} \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} \tau^{2r} |F(f,\tau)|^2 (1-\cos\tau h)^k d\tau \right\}^{1/k} \le A_\sigma^{2-2/k} \frac{\omega_k^{2/k}(f^{(r)},h)}{2\sigma^{2r/k}} . \qquad (6)$$

Проинтегрируем неравенство (6) по переменной h в пределах от 0 до t, где $0 < t \le \pi/(2\sigma)$,

$$tA_\sigma^2(f) - \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} |F(f,\tau)|^2 \frac{\sin\tau t}{\tau} d\tau \le \frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{2\sigma^{2r/k}} \int\limits_0^t \omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau) d\tau .$$

Отсюда имеем

$$A_\sigma^2(f) \le \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} |F(f,\tau)|^2 \left| \frac{\sin\tau t}{\tau t} \right| d\tau + \frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{2\sigma^{2r/k} t} \int\limits_0^t \omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau) d\tau . \qquad (7)$$

Поскольку

$$\max\left\{ \frac{|\sin u|}{u} : t\sigma \le u,\ 0 < t\sigma \le \frac{\pi}{2} \right\} = \frac{\sin t\sigma}{t\sigma} ,$$

то из (7) получаем

$$A_\sigma^2(f) \le \frac{\sin t\sigma}{t\sigma} A_\sigma^2(f) + \frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{2\sigma^{2r/k} t} \int\limits_0^t \omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau) d\tau .$$

Следовательно,

$$A_\sigma^2(f) \le \left\{ 2t\left(1 - \frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right) \right\}^k \sigma^{-2r} \left(\int\limits_0^t \omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau) d\tau \right)^k .$$

Отсюда получаем оценку сверху для $0 < t \le \pi/(2\sigma)$

$$\sup\left\{ \frac{\sigma^{2r} A_\sigma^2(f)}{\left(\int\limits_0^t \omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau) d\tau \right)^k} : f \in L_2^r \right\} \le \left\{ 2t\left(1 - \frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right) \right\}^{-k} . \qquad (8)$$

Для получения оценки снизу выражения, записанного в левой части неравенства (8), рассмотрим как и в [8], целую функцию экспоненциального типа $\sigma+\varepsilon$, где $0<\varepsilon<\sigma$ – произвольное число

$$\Psi_\varepsilon(x):=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{\sin x(\sigma+\varepsilon)}{x}-\frac{\sin x\sigma}{x}\right\}.$$

Поскольку преобразование Фурье F функции $\dfrac{\sin ax}{x}$, $a>0$, равно $\sqrt{\pi/2}$ при $|x|<a$, равно $(\sqrt{\pi}/2)/2$ при $|x|=a$ и равно 0 при $|x|>a$, то

$$F(\Psi_\varepsilon,x)=\begin{cases}1, \text{если } \sigma<|x|<\sigma+\varepsilon,\\ 1/2, \text{если } |x|=\sigma+\varepsilon \text{ или } |x|=\sigma,\\ 0, \text{если } |x|>\sigma+\varepsilon \text{ или } |x|<\sigma.\end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, что для функции $\Psi_\varepsilon\in L_2^r$ в силу (3) и (9) имеем

$$A_\sigma^2(\Psi_\varepsilon)=2\varepsilon. \tag{10}$$

Так как $F(\Psi_\varepsilon^{(r)},x)=(ix)^r F(\Psi_\varepsilon,x)$, то на основании (4) запишем

$$\left\|\Delta_h^k\Psi_\varepsilon^{(r)}(\cdot)\right\|^2=2^{k+1}\int_\sigma^{\sigma+\varepsilon}t^{2r}(1-\cos\tau h)^k d\tau\le 2^{k+1}\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2r}(1-\cos(\sigma+\varepsilon)h)^k.$$

Следовательно,

$$\omega_k^2(\Psi_\varepsilon^{(r)},\tau)\le 2^{k+1}\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2r}(1-\cos(\sigma+\varepsilon)\tau)^k, \tag{11}$$

где $0<\tau\le\pi/(2\sigma)$. Проинтегрировав обе части неравенства (11) по τ в пределах от 0 до t, $t\in(0,\pi/(2\sigma)]$, получаем

$$\int_0^t\omega_k^{2/k}(\Psi_\varepsilon^{(r)},\tau)d\tau\le 2^{1+1/k}\varepsilon^{1/k}(\sigma+\varepsilon)^{2r/k}\left(t-\frac{\sin t(\sigma+\varepsilon)}{\sigma+\varepsilon}\right). \tag{12}$$

Тогда, с учетом (10) и (12), запишем

$$\sup\left\{\frac{\sigma^{2r}A_\sigma^2(f)}{\left(\int_0^t\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)d\tau\right)^k}:f\in L_2^r\right\}\ge\frac{\sigma^{2r}A_\sigma^2(\Psi_\varepsilon)}{\left(\int_0^t\omega_k^{2/k}(\Psi_\varepsilon^{(r)},\tau)d\tau\right)^k}\ge$$

$$\ge U_\varepsilon:=\left(1+\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^{-2r}\left\{\frac{1-\dfrac{\sin t\sigma}{t\sigma}}{1-\dfrac{\sin t(\sigma+\varepsilon)}{t(\sigma+\varepsilon)}}\right\}^k\left\{2t\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-k}. \tag{13}$$

Поскольку для любого числа $\delta > 0$ можно выбрать такое число $\varepsilon_* := \varepsilon(\delta) \in (0,\delta)$, что

$$U_{\varepsilon_*} > \left\{2t\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-k} - \delta, \qquad (14)$$

то в силу определения точной верхней грани множества и на основании соотношений(8) и (13) – (14) получаем требуемое равенство (1).

Перейдем к доказательству соотношения (2). Для этого проинтегрируем дважды неравенство (6) вначале по h в пределах от 0 до v, а затем по v в пределах от 0 до t, $0 < t < \pi/\sigma$. В результате этого получаем соотношение

$$\frac{t^2}{2}A_\sigma^2(f) \le \int\limits_{|\tau|\ge\sigma}\tau^{-2}|F(f,\tau)|^2(1-\cos t\tau)d\tau + \frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{2\sigma^{2r/k}}\int\limits_0^t\int\limits_0^v \omega_k^{2/k}(f^{(r)},h)dhdv. \qquad (15)$$

Используя (3) – (4), определение модуля непрерывности k-го порядка и неравенство Гельдера, запишем оценку сверху первого слагаемого в правой части неравенства (15)

$$\int\limits_{|\tau|\ge\sigma}\tau^{-2}|F(f,\tau)|^2(1-\cos t\tau)d\tau = \int\limits_{|\tau|\ge\sigma}\tau^{-2}|F(f,\tau)|^{2-2/k}|F(f,\tau)|^{2/k}(1-\cos t\tau)d\tau \le$$

$$\le \frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{\sigma^2}\left\{\int\limits_{|\tau|\ge\sigma}|F(f,\tau)|^2(1-\cos t\tau)^k d\tau\right\}^{1/k} \le$$

$$\le \frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{\sigma^2}\left\{\frac{1}{\sigma^{2r}}\int\limits_{|\tau|\ge\sigma}\tau^{2r}|F(f,\tau)|^2(1-\cos t\tau)^k d\tau\right\}^{1/k} \le \frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{2\sigma^{2+2r/k}}\omega_k^{2/k}(f^{(r)},t). \qquad (16)$$

Произведя в повторном интеграле, записанном в правой части неравенства (15), процедуру интегрирования по частям и учитывая (16), перепишем неравенство (15) в следующем виде

$$t^{2k}A_\sigma^2(f) \le \frac{1}{\sigma^{2(k+r)}}\left\{\omega_k^{2/k}(f^{(r)},t) + \sigma^2\int\limits_0^t (t-\tau)\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)d\tau\right\}^k.$$

Отсюда получаем

$$t^{2k}A_\sigma^2(f) \le \frac{1}{\sigma^{2(k+r)}}\omega_k^2(f^{(r)},t)\left\{1+\frac{(\sigma t)^2}{2}\right\}^k.$$

Следовательно, для $0 < t \le \pi/\sigma$ имеем

$$\sup\left\{\frac{A_\sigma^2(f)}{\omega_k^2(f^{(r)},t)} : f \in L_2^r\right\} \le \frac{1}{\sigma^{2r}}\left\{\frac{1}{(\sigma t)^2}+\frac{1}{2}\right\}^k. \qquad (17)$$

Для получения оценки снизу выражения, записанного в левой части неравенства (17), воспользуемся рассмотренным ранее множеством целых функций Ψ_ε, $0 < \varepsilon < \sigma$,экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon$, принадлежащих классу L_2^r . Тогда

$$\sup\left\{\frac{A_\sigma^2(f)}{\omega_k^2(f^{(r)},t)} : f \in L_2^r\right\} \ge \sup\left\{\frac{A_\sigma^2(\Psi_\varepsilon)}{\omega_k^2(\Psi_\varepsilon^{(r)},t)} : \varepsilon \in (0,\sigma)\right\}. \qquad (18)$$

Из (11) получаем

$$\omega_k^2(\Psi_\varepsilon^{(r)},t) \le 2\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2(k+r)}t^{2k}. \qquad (19)$$

Используя (10) и (19), запишем

$$\frac{A_\sigma^2(\Psi_\varepsilon)}{\omega_k^2(\Psi_\varepsilon^{(r)},t)} \ge V_\varepsilon := \left(\frac{1}{1+\varepsilon/\delta}\right)^{2(r+k)} \frac{1}{\sigma^{2r}(\sigma t)^{2k}}. \qquad (20)$$

Поскольку

$$\sup\{V_\varepsilon : \varepsilon \in (0,\sigma)\} = \frac{1}{\sigma^{2r}(\sigma t)^{2k}}, \qquad (21)$$

то с учетом(17) – (18) и (20) – (21) получаем требуемое соотношение (2). Теорема доказана.

В заключение отметим, что в ходе доказательства данного утверждения были использованы некоторые идейные моменты, содержащиеся в [1; 2; 6 – 8].

Библиографические ссылки

1. **Вакарчук, С. Б.** Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 / С. Б. Вакарчук // Математические заметки. – 2006. – Т. 80. – № 1. – С. 11 – 19.
2. **Вакарчук, С. Б.** Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций / С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов // Укр. мат. журнал. – 2004. – Т. 56. – № 11. – С. 1358 – 1466.
3. **Ибрагимов, И. И.** Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени / И. И. Ибрагимов, Ф. Г. Насибов // Доклады АН СССР. – 1970. – Т. 194. – № 5. – С. 1013 – 1016.
4. **Насибов, Ф. Г.** О приближении в L_2 целыми функциями / Ф. Г. Насибов // Доклады АН Азерб. ССР. – 1986. – Т. 42. – № 4. – С. 3 – 6.
5. **Попов, В. Ю.** О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа / В. Ю. Попов // Известия вузов. Математика. – 1972. – № 6. – С. 65 – 78.
6. **Тайков, Л. В.** Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 / Л. В. Тайков // Математические заметки. – 1976. – Т. 20. – № 3. – С. 433 – 438.
7. **Шалаев, В. В.** О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков / В. В. Шалаев // Укр. мат. журнал. – 1991. – Т. 43. – № 1. – С. 125 – 129.
8. **Vakarchuk, S. B.** Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2-approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes / S. B. Vakarchuk // East J. Approxim. – 2004. – Vol. 10. – № 1 – 2. – P. 27 – 39.

Надійшла до редколегії 15.03.09.

УДК 517.5

В.Л.Великин
Днепропетровский национальный университет им.Олеся Гончара

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ОЦЕНКИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РАСТВОРОВ НЕКОТОРЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ЭРМИТОВЫХ СПЛАЙНОВ

Отримано як двосторонні оцінки, так і точні значення інтерполяційних розхилів деяких підпросторів ермітових сплайнів у просторах неперервно диференційовних функцій.

Пусть C^q, $q = 0,1,2,\ldots$, $(C^0 = C)$ – линейное нормированное пространство функций $f(x)$, имеющих на промежутке $[0,1]$ q непрерывных производных, с нормой $\| f \|^{(q)} = \sum_{i=0}^{q} \| f^{(i)} \|_{C[0,1]}$, $\| f \|^{(0)} = \| f \|$.

Пусть еще $\Delta_n = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ $(n \ge 1)$ – произвольное разбиение промежутка $[0,1]$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $\delta_n = \max\{h_i : i = \overline{1,n}\}$. Ниже используем такие обозначения для функции $f \in C^q$: $f_j^{(k)} = f^{(k)}(x_j)$, $j = \overline{0,n}$, $k = \overline{0,q}$.

Каждой функции $f(x) \in C^q$ поставим в соответствие интерполяционный эрмитовый сплайн порядка $2m+1$, $m = 0,1,2,\ldots$, вида

$$s_{r,m}(f;\Delta_n,x) = \sum_{k=0}^{r} f_{i-1}^{(k)} H_{k,m}(h_i; x - x_{i-1}) + (-1)^k f_i^{(k)} H_{k,m}(h_i; x_i - x),\ x \in [x_{i-1}, x_i],$$

$i = \overline{1,n}$, $q, m \ge r$, и

$$H_{k,m}(h;t) = \frac{(h-t)^{m+1}}{k!m!} \sum_{s=0}^{m-k} \frac{(m+s)!}{s!h^{m+s+1}} t^{k+s}, \tag{1}$$

$$H_{k,m}(1;t) := H_{k,m}(t).$$

Подпространство таких сплайнов при фиксированных m, r и Δ_n обозначим через $S_{r,m}(\Delta_n)$. Нетрудно проверить [1], что $H_{k,m}^{(j)}(h;0) = \delta_{k,j}$, $H_{k,m}^{(j)}(h;h) = 0$, $j = \overline{0,m}$, и

$$H_{0,m}(h;t) + H_{0,m}(h;h-t) = 1. \tag{2}$$

Как отмечено в [2], из таких интерполяционных свойств функции $H_{k,m}$ и тождества (2) вытекают неравенства

$$\frac{h-t}{h} = H_{0,0}(h,t) < H_{0,m}(h;t) < H_{0,m+1}(h,t) < 1,\ t \in (0,h/2),\ m \in N. \tag{3}$$

Подставляя в (2) выражение для $H_{0,m}(t)$, получим тождество

$$\sum_{s=0}^{m} C_{m+s}^{s} t^{s}(1-t)^{s}\left(t^{m+1-s} + (1-t)^{m+1-s}\right) \equiv 1, \tag{4}$$

из которого при $t = 1/2$ вытекает равенство $\sum\limits_{s=0}^{m} C_{m+s}^{s} 2^{-s} = 2^{m}$, $m = 0,1,2,\ldots$.

В [2] была введена в рассмотрение величина, представляющая собой так называемый интерполяционный раствор пары подпространств эрмитовых сплайнов. Здесь мы продолжим исследование этой величины, несколько обобщив ее определение. А именно, положим

$$\Theta_{r,p}\left[S_{r_1,m_1}(\Delta_n), S_{r_2,m_2}(\Delta_n)\right] = \sup_{\|f\|^{(r)} \le 1} \left\| s_{r_1,m_1}(f,\Delta_n,x) - s_{r_2,m_2}(f;\Delta_n,x)\right\|_p , \tag{5}$$

где $r \ge 0$, а $\|\cdot\|_p$ – это норма в пространстве $L_p(0,1)$, $1 \le p \le \infty$. В случае $r_1 = r_2 = 0$ левую часть равенства (5) будем обозначать через $\Theta_{r,p}[m_1, m_2, n]$.

В данной работе мы ограничимся изложением результатов по точным значениям либо оценкам величины $\Theta_{r,p}[m_1, m_2, n]$ при некоторых сочетаниях m_1, $r = 0, 1$ и $p = 0, \infty$. Соответствующие результаты для других r и r_1, а также для подпространств интерполяционных сплайнов минимального дефекта, мы планируем изложить в следующем выпуске журнала.

Заметим, что в [2] допущены опечатки: в теореме 1 разность сплайнов оценивается не в метрике C, а в метрике L, в теореме 2 и ее следствиях указанные значения и оценки справедливы для $1/2\Theta_{0,\infty}[m_1, m_2, n]$.

Начнем с усиления теоремы 2 из [2]. Для этого понадобятся три вспомогательных утверждения.

Лемма 1.

$$\lim_{m\to\infty} H_{0,m}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1/2, \\ 1/2, & t = 1/2, \\ 0, & 1/2 < t \le 1. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Для функции $(1-t)^{-m-1}$ воспользуемся формулой Маклорена с остаточным членом в интегральной форме

$$(1-t)^{-m-1} = \sum_{s=0}^{m} C_{m+s}^{s} t^{s} + \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_0^t \frac{(t-x)^m dx}{(1-x)^{2m+2}}.$$

Откуда, с учетом (1) при $h = 1$, получаем

$$H_{0,m}(t) = 1 - \frac{(2m+1)!}{(m!)^2}(1-t)^{m+1} \int_0^t \frac{(t-x)^m dx}{(1-x)^{2m+2}}.$$

Покажем, что второе слагаемое в этом равенстве при фиксированном $t \in [0, 1/2)$ стремится к нулю при $m \to \infty$. Для этого разобьем входящий в него интеграл на два: по промежуткам $[0,\varepsilon^2]$ и $[\varepsilon^2, t]$, где $0 < \varepsilon < 1/2 - t$. Тогда

$$\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}(1-t)^{m+1}\int_0^{\varepsilon^2}\frac{(t-x)^m dx}{(1-x)^{2m+2}} \le \frac{(2m+1)!}{(m!)^2}(1-t)^{m+1}\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{2m+2}}\int_0^t (t-x)^m dx =$$

$$= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2}(1-t)^{m+1}\frac{t^{m+1}}{(m+1)(1-\varepsilon^2)^{2m+2}} < \frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\frac{(1/2-\varepsilon)^{m+1}(1/2+\varepsilon)^{m+1}}{(m+1)\,(1-\varepsilon^2)^{2m+2}} =$$

$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\frac{1-4\varepsilon^2}{1-2\varepsilon^2+\varepsilon^4}\right)^m\right) \to 0,\ m \to \infty.$$

Для второго интеграла получаем

$$\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}(1-t)^{m+1}\int_{\varepsilon^2}^{t}\frac{(t-x)^m dx}{(1-x)^{2m+2}} \le \frac{(2m+1)!}{(m!)^2}(1-t)^{m+1}t^m 4\int_{\varepsilon^2}^{t}\left(\frac{1-x/t}{1-2x+x^2}\right)^m dx =$$

$$= O\left(\sqrt{m}\int_{\varepsilon^2}^{t}\left(\frac{1-x/t}{1-2x+x^2}\right)^m dx\right) \to 0,\ m \to \infty,$$

т к. функция $\omega(x) = (1-x/t)(1-2x+x^2)^{-1}$ убывает на промежутке $[\varepsilon^2, t]$ и $\omega(\varepsilon^2) < 1$.

Заметим, что в [2] при доказательстве теоремы 2 предельное соотношение (6) было получено для $t \in [0,1] \setminus [e^{-1},(e-1)e^{-1}]$.

Следствие 1. $$\lim_{m\to\infty} H_{1,m}(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1/2, \\ 1/4, & t = 1/2, \\ 0, & 1/2 < t \le 1. \end{cases}$$

Действительно, из равенства (1) при $k = 1$ и $h = 1$ получаем

$$H_{1,m}(t) = t H_{0,m}(t) - (2m!)(m!)^{-2} t^{m+1}(1-t)^{m+1}.$$

А поскольку для $0 \le t \le 1$ второе слагаемое справа в этом равенстве стремится к нулю при $m \to \infty$, то доказываемое предельное соотношение вытекает из (6).

Аналогичные рассуждения приводят к следующим предельным равенствам:

$$\lim_{m\to\infty} H_{k,m}(t) = \begin{cases} t^k/k!, & 0 \le t < 1/2, \\ 1/(2^{k+1}k!), & t = 1/2, \\ 0, & 1/2 < t \le 1 \end{cases}$$

Лемма 2. Для любого фиксированного $m_0 \in \mathbf{N}$

$$\lim_{m\to\infty}\ \sup_{\|f\|\le a} \| s_{0,m}(f;\Delta_n;x) - s_{0,m_0}(f;\Delta_n;x) \| = a. \qquad (7)$$

Доказательство. Не уменьшая общности, ограничимся рассмотрением $x \in [0; h/2]$, $h = h_1$. Тогда, с учетом (3) и (2), получаем:

$$|s_{0,m}(f;\Delta_n;x)-s_{0,m_0}(f;\Delta_n;x)|=$$
$$=|f_0(H_{0,m}(h;x)-H_{0,m_0}(h;x))+f_h(H_{0,m}(h;h-x)-H_{0,m_0}(h;h-x))|=$$
$$=|(f_0-f_h)(H_{0,m}(h;x)-H_{0,m_0}(h;x))|\le 2\|f\|(H_{0,m}(h;x)-H_{0,m_0}(h;x))\le$$
$$\le 2\|f\|(1-H_{0,m_0}(h;x))\le\|f\|\le a.$$

Откуда, в силу леммы 1, вытекает предельное равенство (7).

Следствие 2. *Для любого фиксированного* $m_0\in\mathbf{N}$ $\lim\limits_{m\to\infty}\Theta_{0,\infty}[m,m_0,n]=1$.

Лемма 3.

$$\sup\{|f_{i-1}-f_i|:\ f\in C^1,\ \ \|f\|^{(1)}\le 1\}=2h_i(2+h_i)^{-1}\le 2\delta_n(2+\delta_n)^{-1}. \qquad (8)$$

Доказательство. Не уменьшая общности, ограничимся рассмотрением тех функций $f\in C^1$, для которых $f_{i-1}=-f_i$. Тогда из условия $\|f\|^{(1)}\le 1$ получаем неравенство $2|f_i|h_i^{-1}+|f_i|\le 1$. Откуда $|f_i|\le h_i(2+h_i)^{-1}$, и поэтому

$$\sup\{|f_{i-1}-f_i|:\ f\in C^1,\ \ \|f\|^{(1)}\le 1\}\le 2h_i(2+h_i)^{-1}.$$

Ясно, что $h_i(2+h_i)^{-1}\le\delta_n(2+\delta_n)^{-1}$.

Для функции f_ε, $0<\varepsilon<h_i/2$, определяемой равенствами

$f_\varepsilon(x)=h_i(2+h_i)^{-1},\ \ x\in[0,x_{i-1}-\varepsilon]$,

$f_\varepsilon(x)=h_i(2+h_i)^{-1}-(x-x_{i-1}+\varepsilon)^2(2\varepsilon(2+h_i))^{-1},\ x\in[x_{i-1}-\varepsilon,\ x_{i-1}+\varepsilon]$,

$f_\varepsilon(x)=2(x_{i-1}+h_i/2-x)(2+h_i)^{-1},\ \ x\in[x_{i-1}+\varepsilon,\ x_i-\varepsilon]$,

$f_\varepsilon(x)=(x-x_i-\varepsilon)^2(2\varepsilon(2+h_i))^{-1}-h_i(2+h_i)^{-1},\ \ x\in[x_i-\varepsilon,\ x_i+\varepsilon]$,

$f_\varepsilon(x)=-h_i(2+h_i)^{-1},\ \ x\in[x_i+\varepsilon,\ 1]$,

находим

$$f_\varepsilon\in C^1,\quad \|f_\varepsilon\|=h_i(2+h_i)^{-1},\quad \|f_\varepsilon\|^{(1)}=1,$$
$$f_\varepsilon(x_{i-1})=-f_\varepsilon(x_i)=h_i(2+h_i)^{-1}-\varepsilon(2(2+h_i))^{-1}.$$

Поэтому,

$$\sup\{|f_{i-1}-f_i|:f\in C^1,\ \|f\|^{(1)}\le 1\}\ge|f_\varepsilon(x_{i-1})-f_\varepsilon(x_i)|=2h_i(2+h_i)^{-1}-\varepsilon(2+h_i)^{-1},$$

и, в силу произвольности ε, получаем утверждение доказываемой леммы.

Теорема 1. *Для любых* $m\in\mathrm{N}$ *имеет место соотношение*

$$\sqrt{3}\delta_n(9(2+\delta_n))^{-1}\le\Theta_{1,\infty}[m,0,n]<\delta_n(2+\delta_n)^{-1}=\lim_{m\to\infty}\Theta_{1,\infty}[m,0,n].$$

Знак равенства в левой части имеет место только при $m=1$.

Доказательство. На основании леммы 3 имеем:

$$\Theta_{1,\infty}[m,0,n]=\sup_{\|f\|^{(1)}\le 1}\|s_{0,m}(f;\Delta_n;x)-s_{0,0}(f;\Delta_n;x)\|=$$
$$=\sup_{\|f\|^{(1)}\le 1}\max_{1\le i\le n}\|s_{0,m}(f;\Delta_n;x)-s_{0,0}(f;\Delta_n;x)\|_{C[x_{i-1},x_i]}=$$
$$=\sup_{\|f\|^{(1)}\le 1}\max_{1\le i\le n}|f_{i-1}-f_i|\,\|H_{0,m}(h_i;t)-H_{0,0}(h_i;t)\|_{C[0,h_i]}=$$

$$= 2\delta_n (2+\delta_n)^{-1} \| H_{0,m}(\delta_n, t) - H_{0,0}(\delta_n, t) \|_{C[0,\delta_n]}.$$

Откуда, с учетом (3) и леммы 1, получаем

$$\Theta_{1,\infty}[m,0,n] < \delta_n (2+\delta_n)^{-1} = \lim_{m\to\infty} \Theta_{1,\infty}[m,0,n].$$

Остается заметить, что (см. [2])

$$\| H_{0,1}(\delta_n; t) - H_{0,0}(\delta_n; t) \|_{C[0,\delta_n]} = \sqrt{3}/18.$$

Следствие 3. *Для любого фиксированного* $m_0 \in \mathbf{N}$

$$\lim_{m\to\infty} \Theta_{1,\infty}[m, m_0, n] = \delta_n (2+\delta_n)^{-1}.$$

Теорема 2. *Для любых* $m \in \mathbf{N}$ *и* $r = 0,1$ *имеет место равенство*

$$\Theta_{r,\infty}[m+1, m, n] = 2a_{r,n} \| \varphi_m \|,$$

где $a_{0,n} = 1$, $a_{1,n} = \delta_n (2+\delta_n)^{-1}$, а $\varphi_m(t) = C_{2m+1}^m t^{m+1} (1-t)^{m+1} (1-2t)$.

Доказательство. Пусть $[x_{j-1}, x_j]$ – тот из промежутков, для которого $h_j = \delta_n$ Тогда, с учетом леммы 3 и равенства (1) при $h = \delta_n$, получаем

$$\Theta_{r,\infty}[m+1, m, n] = \sup_{\|f\|^{(r)} \le 1} \| s_{0,m+1}(f; \Delta_n, x) - s_{0,m}(f; \Delta_n, x) \| =$$

$$= \sup_{\|f\|^{(r)} \le 1} |f_{j-1} - f_j| \, \| H_{0,m+1}(\delta_n; x) - H_{0,m}(\delta_n; x) \|_{C[0,\delta_n]} \le 2a_{r,n} \| H_{0,m+1}(t) - H_{0,m}(t) \|.$$

Из (1) непосредственно находим, что $H_{0,m+1}(t) - H_{0,m}(t) = \varphi_m(t)$.

Таким образом, $\Theta_{r,\infty}[m+1, m, n] \le 2a_{r,n} \| \varphi_m \|$.

Противоположное неравенство при $r = 0$ получится, если воспользоваться, в качестве экстремальной, функцией $f(x) = 1$ для $x \in [0, x_{j-1}]$, $f(x) = (2x_{j-1} + \delta_n - 2x)\delta_n^{-1}$ для $x \in [x_{j-1}, x_j]$ и $f(x) = -1$ для $x \in [x_j, 1]$ В случае $r = 1$, можно воспользоваться функцией f_ε при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 3. *Для любых* $m \in \mathrm{N}$ *имеет место соотношение*

$$1/8 = \Theta_{0,1}[1,0,n] \le \Theta_{0,1}[m,0,n] < 1/2 = \lim_{m\to\infty} \Theta_{0,1}[m,0,n] \tag{9}$$

Доказательство. $\Theta_{0,1}[1,0,n] = \sup\limits_{\|f\| \le 1} \int\limits_0^1 | s_{0,1}(f, \Delta_n; x) - s_{0,0}(f; \Delta_n, x) | dx =$

$$= 2 \sup_{\|f\| \le 1} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} | H_{0,1}(h_i; x - x_{i-1}) - H_{0,0}(h_i; x - x_{i-1}) | dx = \sum_{i=1}^m \frac{h_i}{8} = \frac{1}{8}.$$

Неравенство $\Theta_{0,1}[1,0,n] < \Theta_{0,1}[m,0,n]$, $m \ge 2$, следует из монотонного по m возрастания последовательности функций $H_{0,m}(h;t)$ на промежутке $[0, h/2]$ Соотношение $\Theta_{0,1}[m,0,n] < 1/2 = \lim\limits_{m\to\infty} \Theta_{0,1}[m,0,n]$ вытекает из леммы (1).

Теорема 4. *Для любых* $m \in N$ *имеют место следующие соотношения:*

$$\Theta_{0,1}[m+1,m,n] = \frac{(2m+1)!}{2^{2m+2}m!(m+2)!} \tag{10}$$

и

$$\Theta_{0,1}[m+\nu,m,n] = \sum_{s=0}^{\nu-1} \frac{(2m+2s+1)!}{2^{2m+2s+2}(m+s)!(m+s+2)!}. \tag{11}$$

Доказательство.

$$\Theta_{0,1}[m+1,m,n] = \sup_{\|f\|\le 1} \int_0^1 |s_{0,m+1}(f;\Delta_n;x) - s_{0,m}(f;\Delta_n;x)|dx \le$$

$$\le 2\sum_{i=1}^{n} \int_0^{h_i} |H_{0,m+1}(h_i;t) - H_{0,m}(h_i;t)|dt = 4\sum_{i=1}^{n} h_i \int_0^{1/2} \varphi_m(t)dt = \frac{(2m+1)!}{2^{2m+2}m!(m+2)!}.$$

Второе соотношение доказываемой леммы вытекает из равенства

$$\Theta_{0,1}[m+\nu,m,n] = \sum_{s=0}^{\nu-1} \Theta_{0,1}[m+s+1,m+s,n].$$

Заметим, что из (11), (10) и (9) следует интересное, как нам кажется, равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)!}{2^{2m+1}m!(m+2)!} = 1.$$

Теорема 5. *Для любых* $m \in N$ *и* $\delta_n = 1/n$ *имеют место следующие соотношения:*

$$\Theta_{1,1}[m+1,m,n] = \frac{(2m+1)!}{2^{2m+2}m!(m+2)!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

и

$$\Theta_{1,1}[m+\nu,m,n] = \frac{1}{2n+1} \sum_{s=0}^{\nu-1} \frac{(2m+2s+1)!}{2^{2m+2s+2}(m+s)!(m+s+2)!}.$$

Доказательство. Значение величины $\Theta_{1,1}[m+1,m,n]$ получается, как и в предыдущей теореме, с учетом того, что для $f \in C^1$, удовлетворяющей условию $\|f\|^1 \le 1$, имеем $\|f\| \le 1/(2n+1)^{-1}$, а экстремальная функция аналогична функции f_ε на каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$.

Библиографические ссылки

1. **Великин В.Л.** Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классе дифференцируемых функций /В.Л. Великин // Изв. АН СССР, Серия Математика, 1973, 37. С. 165–185.
2. **Бовдуй Е.Ю.** Об интерполяционном растворе некоторых подпространств эрмитовых сплайнов /Е.Ю. Бовдуй, В.Л. Великин//Вісник Дніпропетр. ун-ту. 2007., №8.,– С. 54–56.

Надійшла до редколегії 01.04 09

УДК 517.5

С.В. Гончаров

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В МЕТРИКЕ L_ρ^p

Отримано варіант посилення аналога теореми Джексона про наближення на відрізку алгебраїчними поліномами в інтегральній метриці для деяких класів інтегровних з вагою $\rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ функцій.

Пусть $\alpha,\beta>-1$; $\rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ – весовая функция, определённая на интервале $(-1;1)$. $L_\rho^p[-1;1]$ для $p\ge 1$ (далее – L_ρ^p) – пространство функций $f:[-1;1]\to R$, для которых $\exists\|f\|_{L_\rho^p}=\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$.

Если $\alpha=\beta=0$, то $L_\rho^p=L_p$. Класс функций $H_p^{(r+\nu)}$ ($r\in Z_+$, $0<\nu\le 1$) есть $\left\{f\in L_p:\exists f^{(r)}\in L_p,\forall h\in(0;1)\left\|f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)\right\|_{L_p[-1;1-h]}\le h^\nu\right\}$. В [2] получено следующее усиление аналога теоремы Джексона в метрике L_p [2, теорема 7]:

Если функция $f(x)$ *принадлежит классу* $H_p^{(r+\nu)}$, *то существует постоянная* C_r, *зависящая только от* r, *такая, что для любого* $n\ge r$ *найдётся алгебраический полином степени* $\le n$, *удовлетворяющий неравенство:* $\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{r+\nu}}\right\|_{L_p}\le C_r\frac{\ln^{\frac{1}{p}}n}{n^{r+\nu}}$. *Если в левой части заменить* ν *на* $\mu\in[0;\nu)$, *то правую можно заменить на* $C'_{r;\mu}n^{-r-\nu}$.

Данная работа содержит частичное обобщение этого результата (теорема 5) для $\alpha,\beta>-1$, полученное, в основном, проведением рассуждений по исходным схемам с дополнительными модификациями, учитывающими функцию веса. Узловые вспомогательные утверждения, таким образом, в свою очередь, обобщают прототипы, взятые преимущественно из [2; 3; 4; 5]. Для выделения таких ссылок на прототипы используется символ «$\cong$».

Символы типа $C, C_2, C'', \tilde{C}_{\beta;p},\ldots$ обозначают константы, абсолютные или зависящие от (некоторых из) величин α,β,p,r,ν,μ.

Рассматриваемое обобщение является частичным, поскольку при $r>0$ возникают добавочные ограничения: $p\ge 1+2\alpha\ge 0, p\ge 1+2\beta\ge 0$.

Итак, пусть $\alpha,\beta>-1$; $p\ge 1$, $r\in Z_+$, $0<\nu\le 1$, $\rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Класс функций $M\hat{H}^{(r+\nu)}_{p,\rho}:=\{f\in L^p_\rho[-1;1]:\exists f^{(r)}\in L^p_\rho[-1;1], f^{(r)}\in L_1[-1;1], \forall h\in(0;1)$

$$\left(\int_{-1}^{1-h}\left|f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)\right|^p\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}},\left(\int_{-1+h}^{1}\left|f^{(r)}(x)-f^{(r)}(x-h)\right|^p\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\le Mh^\nu\}.$$

При $\alpha,\beta\le 0$ условие $f^{(r)}\in L_1$ избыточно как следствие условия $f^{(r)}\in L^p_\rho$.

Пусть $\varphi_h(t):=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}f(u)du, -1\le t\le 1-h, 0<h<1$.

Для $\forall f\in M\hat{H}^{(\nu)}_{p,\rho}\ (r=0)$ простым следствием этих определений и обобщённого неравенства Минковского является

Лемма 1 ($\cong$ [4, лемма 3]). $I_1=\left(\int_{-1+h}^{1-h}\left|f(t)-\varphi_h(t)\right|^p(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt\right)^{\frac{1}{p}}\le Mh^\nu$.

$\forall f\in M\hat{H}^{(\nu)}_{p,\rho}\ (r=0)$, $F_n(f;x):=n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)dt, \forall x\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right), k=\overline{-n,n-1}$.

Лемма 2 ($\cong$ [4, лемма 4]). $I_2=\left(\int_{-1+n^{-1}}^{1-n^{-1}}\left|\varphi_{\frac{1}{n}}(t)-F_n(f;t)\right|^p\rho(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\le C_{\alpha,\beta}Mn^{-\nu}$.

Доказательство. $I_2=\left(\sum_{k=-n+1}^{n-2}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|n\int_t^{t+\frac{1}{n}}f(u)du-n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(u)du\right|^p\rho(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\le$

$\le n\left(\sum_{k=-n+1}^{n-2}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|f\left(u+\frac{1}{n}\right)-f(u)\right|du\right)^p\rho(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}$. Если $p>1$, по неравенству

Гёльдера $I_2\le n^{\frac{1}{p}}\left(\underbrace{\sum_{k=-n+1}^{n-2}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|f\left(u+\frac{1}{n}\right)-f(u)\right|^p du\cdot\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt}_{S}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Разобьём S на $\Sigma_1=\sum_{k=-n+1}^{-1}(\ldots)$ и $\Sigma_2=\sum_{k=0}^{n-2}(\ldots)$. Рассмотрим Σ_2: $u,t\ge 0$. Для $x\in[0;1)\subseteq[-0.5;1)$ $(1-x)^\alpha\min\{2^{-\beta};2^\beta\}\le\rho(x)\le(1-x)^\alpha\max\{2^{-\beta};2^\beta\}$, и если

$\alpha<0$, то $\Sigma_2 \le \widehat{C}_\beta \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f\left(u+\frac{1}{n}\right)-f(u)\right|^p (1-u)^\alpha du \cdot \underbrace{\left(1-\frac{k}{n}\right)^{-\alpha} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (1-t)^\alpha dt}_{A_k}$.

$A_k \le n^{-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{-\alpha}\left(1-\frac{k+1}{n}\right)^\alpha = n^{-1}\left(1-\frac{1}{n-k}\right)^\alpha \le 2^{-\alpha} n^{-1}$, откуда $\Sigma_2 \le C'_{\alpha,\beta} n^{-1} \times$
$\times \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f\left(u+\frac{1}{n}\right)-f(u)\right|^p \rho(u) du$. Аналогичная оценка верна при $\alpha \ge 0$; то же для Σ_1, $\forall \beta > -1$, поэтому $I_2 \le \widetilde{C}_{\alpha;\beta}\left(\int_{-1+n^{-1}}^{1-n^{-1}} \left| f\left(u+\frac{1}{n}\right)-f(u)\right|^p \rho(u) du \right)^{\frac{1}{p}} \le \widetilde{C}_{\alpha,\beta} M n^{-\nu}$.

Лемма 3⁺ ($\cong$ [4, лемма 2]). $I_3 = \int_{1-n^{-1}}^{1} \int_{1-n^{-1}}^{1} |f(x)-f(y)|^p dx \cdot \rho(y) dy \le 2M^p n^{-1-\nu p}$.

Доказательство. После замены во внутреннем интеграле $u = x-y, du = dx$ получаем:

$$I_3 = \int_{1-n^{-1}}^{1} \int_{1-n^{-1}-y}^{1-y} |f(u+y)-f(y)|^p \rho(y) du dy = \int_{-n^{-1}}^{0} \int_{1-n^{-1}-u}^{1} |f(y+u)-f(y)|^p \rho(y) dy du +$$

$+ \int_{0}^{n^{-1}} \int_{1-n^{-1}}^{1-u} |f(y+u)-f(y)|^p \rho(y) dy du$. Делая в 1-м интеграле замену переменной $v=-u$, $I_3 \le \int_{0}^{n^{-1}} \int_{1-n^{-1}+v}^{1} |f(y)-f(y-v)|^p \rho(y) dy dv + \int_{0}^{n^{-1}} \int_{-1}^{1-u} |f(y+u)-f(y)|^p \rho(y) dy du \le$

$$\le \int_{0}^{n^{-1}} \int_{-1+v}^{1} |f(y)-f(y-v)|^p \rho(y) dy dv + \int_{0}^{n^{-1}} (Mu^\nu)^p du \le 2M^p \int_{0}^{n^{-1}} u^{\nu p} du \le 2M^p n^{-1-\nu p}.$$

Лемма 3⁻. $I_3 = \int_{-1}^{-1+n^{-1}} \int_{-1}^{-1+n^{-1}} |f(x)-f(y)|^p dx \cdot \rho(y) dy \le 2M^p n^{-1-\nu p}$.

Теорема 1 ($\cong$ [5, лемма 4]). $\forall f \in M\hat{H}^{(\nu)}_{p,\rho}$ $\quad \|f - F_n(f)\|_{L^p_\rho} \le C_{\alpha;\beta;p} M n^{-\nu}$.

Доказательство. Так как $[-1;1] = [-1;-1+n^{-1}] \cup [-1+n^{-1};1-n^{-1}] \cup [1-n^{-1};1]$ и $|f(x)-F_n(f;x)| \le |f(x)-\varphi_{n^{-1}}(x)| + |\varphi_{n^{-1}}(x)-F_n(f;x)|$, то с учётом лемм 1 и 2, а также неравенства Гёльдера, если $p>1$, $I = \|f - F_n(f)\|_{L^p_\rho} \le C_{\alpha;\beta;p} M n^{-\nu} +$

$$+ C_p n^{\frac{1}{p}} \left(\left(\int_{-1}^{-1+n^{-1}} \int_{-1}^{-1+n^{-1}} |f(x)-f(t)|^p dt \cdot \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{1-n^{-1}}^{1} \int_{1-n^{-1}}^{1} |f(x)-f(t)|^p dt \cdot \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

Вследствие лемм $3^+, 3^-$ $I \le C_{\alpha,\beta,p} M n^{-\nu} + 2C_p n^{\frac{1}{p}} \left(2M^p n^{-1-\nu p}\right)^{\frac{1}{p}} = \widetilde{C}_{\alpha;\beta;p} M n^{-\nu}$.

Введём разбиение ([2, §3]) отрезка $[-1;1]$: $\forall n \in N$, пусть a_i таковы, что:

«а») $a_0 = 0, a_{i+1} = a_i + K_i\left(n \cdot 2^i\right)^{-1}$, где $K_i \in N$; «б») $\sqrt{1-a_i^2} > 2^{-i}$;

«в») $\sqrt{1-\left(a_i + \left(n \cdot 2^{i-1}\right)^{-1}\right)^2} \le 2^{-i}$; $i = 1,2,\ldots,[\log_2 n]$; $a_{[\log_2 n]+1} := 1$; $a_{-i} = -a_i$.

Разобьём $[a_i;a_{i+1}]$ на отрезки длины $\left(n \cdot 2^i\right)^{-1}$; полученные точки вместе с a_i обозначим x_j; $x_j < x_{j+1}$, $j = \overline{0, N+1}$; $x_0 = -1, x_{N+1} = 1$. Если $\tau_i := \arccos x_i$, то $\frac{1}{2n} < |\tau_i - \tau_{i+1}| < \frac{2}{n}$ ([2, §3]); $\sin\tau_i = \sqrt{1-x_i^2}$. $E_k := [a_k;a_{k+1}) \cup (a_{-(k+1)};a_{-k}]$, $k \ge 0$.

Пусть снова $f \in \hat{H}_{p,\rho}^{(v)}$, а $F_{\tilde{n}}(f;x) := F_{n \cdot 2^k}(f;x)$, $\forall x \in E_k$.

Теорема 2 ($\cong$ [2, теорема 5]). $\forall f \in \hat{H}_{p,\rho}^{(v)}$: $\left\| \frac{f - F_{\tilde{n}}(f)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^v} \right\|_{L_\rho^p} \le C_{\alpha;\beta;p} \ln^{\frac{1}{p}} n$.

Доказательство. Оценим $I = \left\| \frac{f - F_{\tilde{n}}(f)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^v} \right\|_{L_\rho^p}^p = \sum\limits_{k=0}^{[\log_2 n]} \int\limits_{E_k} \left| \frac{f(x) - F_{\tilde{n}}(f,x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^v} \right|^p \rho(x)dx$.

По теореме 1 $\int\limits_{E_k} \left|f(x) - F_{n \cdot 2^k}(f;x)\right|^p \rho(x)dx \le \int\limits_{[-1,1]} |\ldots|^p \rho(x)dx \le C_{\alpha;\beta,p}\left(n \cdot 2^k\right)^{-vp}$.

Для $k < [\log_2 n]$, на E_k $\sqrt{1-x^2} > \sqrt{1-a_{k+1}^2} > 2^{-k-1}$ (свойство «б»), откуда $\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{-v} \le \left(n \cdot 2^{k+1}\right)^v$; на $E_{[\log_2 n]}$ $n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2} > n^{-2}$, поэтому $\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{-v} \le \left(n \cdot 2^{[\log_2 n]+1}\right)^v$. Значит, $I \le C_{\alpha;\beta;p} \sum\limits_{k=0}^{[\log_2 n]} \left(n \cdot 2^{k+1}\right)^{vp} \cdot \left(n \cdot 2^k\right)^{-vp} =$
$= \hat{C}_{\alpha;\beta;p}\left([\log_2 n]+1\right) \le C'_{\alpha;\beta;p} \ln n$, что эквивалентно утверждению теоремы.

Лемма 4 ([1, лемма 3]). $\forall n \in N, \forall z \in [-1;1]$ существует алгебраический полином $\Omega_z(x)$ степени, не превосходящей $2mn$, такой, что $\forall x \in [-1;1]$ $\left|\theta_z(x) - \Omega_z(x)\right| \le \frac{A(m)}{\left(1+n|\arccos x - \arccos z|\right)^{2m-1}}$, где $\theta_z(x) = \theta(x-z)$ ($\theta(x) = I_{[0;+\infty)}(x)$ – функция Хевисайда); $m \in N$ фиксировано; $A(m)$ зависит от m.

Рассмотрим ($\cong$ [2, теорема 6]) полином $P_n(x)$ степени $\le 2mn$ (m – фиксированное число, будет выбрано позднее): $P_n(x) := \tilde{L}_{n,0} + \sum\limits_{j=1}^{N} \Omega_{x_j}(x)\Delta\tilde{L}_{n,j}$,

где $\Omega_{x_j}(x)$ – полиномы из леммы 4, а $\Delta\tilde{L}_{n,j} = \frac{1}{\Delta x_j}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)dt - \frac{1}{\Delta x_{j-1}}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)dt$, $j > 0$;

$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$; $\tilde{L}_{n,0} = \frac{1}{\Delta x_0}\int\limits_{-1}^{x_1} f(t)dt$.

Оценим $D=\left\|\frac{F_{\tilde n}(f;x)-P_n(x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{\nu}}\right\|_{L^p_\rho}^p=\sum_i\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(\theta_j(x)-\Omega_{x_j}(x)\right)\Delta\tilde L_{n,j}}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{\nu}}\right|^p\rho(x)dx$.

$\left(\Omega_{x_0}(x)\equiv 1=\theta_0(x)\right)$. $\left|\sin\tau_{i,n}-\sin\tau_{i+1,n}\right|\le\left|\tau_{i,n}-\tau_{i+1,n}\right|<2n^{-1}\Rightarrow\frac{n^{-1}\sqrt{1-x_i^2}+n^{-2}}{n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}}\le$

$\le\frac{\sqrt{1-x_i^2}+n^{-1}}{\sqrt{1-x_{i+1}^2}+n^{-1}}=\frac{\sin\tau_{i,n}+n^{-1}}{\sin\tau_{i+1,n}+n^{-1}}\le 3$; заменив знаменатель на $\left(n^{-1}\sqrt{1-x_i^2}+n^{-2}\right)^{\nu}$,

$$D\le C_{p;\nu}\sum_i\frac{1}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x_i^2}+n^{-2}\right)^{\nu p}}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\sum_j\left(\theta_j(x)-\Omega_{x_j}(x)\right)\Delta\tilde L_{n,j}\right|^p\rho(x)dx\le$$

$$\le C_{p;\nu}\sum_i\frac{1}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x_i^2}+n^{-2}\right)^{\nu p}}\left(\sum_j\left|\Delta\tilde L_{n,j}\right|\cdot\sup_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|\theta_j(x)-\Omega_{x_j}(x)\right|\right)^p\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\rho(x)dx.$$

Оценим $\sum\limits_{i:\,x_i\ge 0}(\ldots)$; вторая часть суммы оценивается аналогично.

$\left(n^{-1}\sqrt{1-x_i^2}+n^{-2}\right)^{\nu p}\ge n^{-\nu p}\sin^{\nu p}\tau_{i,n}$; докажем, что $W=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\rho(x)dx\le C_{\alpha;\beta}\frac{\sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}}{n}$.

Предварительно заметим, что $\sqrt{1-a_k^2}<2^{-k+2}$, $k=\overline{0,[\log_2 n]}$: если $k=0$, это очевидно, а для $k>0$ условие «в» можно переписать в виде

$$1-a_k^2\le 4^{1-k}\left(0.25+\frac{a_k\cdot 2^k}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\le 4^{1-k}\left(1.25+a_k\cdot\frac{2^k}{n}\right)<4\cdot 4^{-k+1}.$$

1) $\alpha<0$: $[x_i;x_{i+1}]\subset[a_{k-1};a_k]$; $W\le\hat C_\beta\int\limits_{a_k-\left(n\cdot 2^{k-1}\right)^{-1}}^{a_k}(1-x)^\alpha dx$.

а) $a_k<1$ $(k\le[\log_2 n])$: $W\le C_{\alpha;\beta}\left(n\cdot 2^{k-1}\right)^{-1}\cdot\left(\sqrt{1-a_k^2}\right)^{2\alpha}\le C'_{\alpha;\beta}n^{-1}\left(\sqrt{1-a_k^2}\right)^{1+2\alpha}$.

а-1) $\alpha\ge-\frac{1}{2}$: $W\le C'_{\alpha;\beta}n^{-1}\sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}$.

а-2) $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$: $\sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}\ge C'''_{\alpha;\beta}\left(\sqrt{1-a_{k-1}^2}\right)^{1+2\alpha}\ge\overline{C'''_{\alpha;\beta}}\cdot 2^{-k(1+2\alpha)}$,

и $W\le C''_{\alpha;\beta}n^{-1}\cdot 2^{(-k)(1+2\alpha)}\le\tilde C'''_{\alpha;\beta}n^{-1}\sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}$.

б) $a_k=1$ $(k=[\log_2 n]+1)$: $\sin\tau_{i,n}\ge\sqrt{1-x_{N,n}^2}=\sqrt{1-\left(1-\left(n\cdot 2^{[\log_2 n]}\right)^{-1}\right)^2}\ge\frac{1}{n}$. То есть $\sin\tau_{N,n}\ge n^{-1}$; поэтому, учитывая поведение $\sin\arccos x$,

$$\sin\tau_{l,n}\ge n^{-1},\ l=\overline{1,N}\qquad\text{(F)}$$

и $W\le\hat C_\beta\int\limits_0^{\left(n\cdot 2^{k-1}\right)^{-1}}t^\alpha dt=C_{\alpha;\beta}\left(n\cdot 2^{[\log_2 n]}\right)^{-1-\alpha}\le C'_{\alpha;\beta}n^{-2-2\alpha}$. Если $\alpha\ge-\frac{1}{2}$, то $W\le C'_{\alpha;\beta}n^{-1}\sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}$, а если $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$, то аналогично (а-2) в (а) $\sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}\ge$

$\geq \overline{C'''_{\alpha;\beta}} \cdot 2^{-([\log_2 n]+1)(1+2\alpha)} \geq \overline{C'''_{\alpha;\beta}} n^{-1-2\alpha}$, и опять $W \leq C''_{\alpha;\beta} n^{-1} \sin^{1+2\alpha} \tau_{i,n}$.

2) $\alpha \geq 0: [x_i; x_{i+1}] \subset [a_{k-1}; a_k]$; $W \leq \widehat{C}_\beta \int\limits_{a_{k-1}}^{a_{k-1}+(n\cdot 2^{k-1})^{-1}} (1-x)^\alpha dx \leq$

$\leq C_{\alpha;\beta} \left(n \cdot 2^{k-1}\right)^{-1} \left(\sqrt{1-a_{k-1}^2}\right)^{2\alpha} \leq C'_{\alpha;\beta} n^{-1} 2^{-k(1+2\alpha)}$.

а) $a_k < 1$: $W < C'_{\alpha;\beta} n^{-1} \left(\sqrt{1-a_k^2}\right)^{1+2\alpha} < C'_{\alpha;\beta} n^{-1} \sin^{1+2\alpha} \tau_{i,n}$.

б) $a_k = 1$: $W \leq C'_{\alpha;\beta} n^{-1} \cdot 2^{-([\log_2 n]+1)(1+2\alpha)} \leq C'_{\alpha;\beta} n^{-2-2\alpha}$, далее – как в случае $\alpha < 0$.

$D \leq C \sum\limits_i \frac{\sin^{1+2\alpha-\nu p} \tau_{i,n}}{n^{1-\nu p}} \left(\sum\limits_j \left|\Delta \widetilde{L}_{n,j}\right| \cdot \sup\limits_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \left|\theta_j(x) - \Omega_{x_j}(x)\right| \right)^p$. Вследствие выбора $\Omega_{x_j}(x)$ $\left|\theta_j(x) - \Omega_{x_j}(x)\right| \leq A(m)\left(1 + n\left|\arccos x - \arccos x_j\right|\right)^{-(2m-1)}$. Пусть $\arccos x = \tau$, тогда $\tau \in [\tau_{i+1,n}; \tau_{i,n}]$. $\frac{1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|}{1+n|\tau-\tau_{j,n}|} \leq 1 + \frac{n|\tau_{i,n}-\tau|}{1+n|\tau-\tau_{j,n}|} \leq 1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{i+1,n}\right| \leq 3$, поэтому

$D \leq C n^{\nu p-1} \sum\limits_i \sin^{1+2\alpha-\nu p} \tau_{i,n} \left(\sum\limits_j \left|\Delta \widetilde{L}_{n,j}\right| \left(1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|\right)^{-(2m-1)} \right)^p$. Если $p = 1$,

$D \leq C n^{\nu p-1} \sum\limits_j \left|\Delta \widetilde{L}_{n,j}\right|^1 \sum\limits_i \sin^{1+2\alpha-\nu 1} \tau_{i,n} \cdot \left(1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|\right)^{-0.5(2m-1)}$; если $p > 1$, по неравенству Гёльдера $\left(\sum\limits_j \frac{|\Delta \widetilde{L}_{n,j}|}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{2m-1}} \right)^p = \left(\sum\limits_j \frac{|\Delta \widetilde{L}_{n,j}|}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}}} \cdot \frac{1}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}}} \right)^p \leq$

$\leq \sum\limits_j \frac{|\Delta \widetilde{L}_{n,j}|^p}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}p}} \cdot \left(\sum\limits_j \frac{1}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}q}} \right)^{\frac{p}{q}}$; $\left|\tau_{i,n} - \tau_{i+1,n}\right| > \frac{1}{2n} \Rightarrow$ для достаточно больших m $\sum\limits_j \left(1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|\right)^{-\frac{2m-1}{2}q} \leq 2 \cdot 2^{\frac{2m-1}{2}q} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (2+k)^{-\frac{2m-1}{2}q} = C_{m;q}$ – тогда

$$D \leq C' n^{\nu p-1} \sum_j \left|\Delta \widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sum_i \frac{\sin^{1+2\alpha-\nu p} \tau_{i,n}}{\left(1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|\right)^{\frac{2m-1}{2}p}} = C\Big(\overbrace{n^{\nu p-1} \sum_{j:\, x_{j,n}<0} (\ldots)}^{\Sigma_-} + \overbrace{n^{\nu p-1} \sum_{j:\, x_{j,n}\geq 0} (\ldots)}^{\Sigma_+} \Big).$$

А. Σ_+ (для краткости будем писать $\sum\limits_j (\ldots)$ вместо $\sum\limits_{j:\, x_{j,n}\geq 0} (\ldots)$)

1) $1 + 2\alpha - \nu p \geq 0$. Учитывая, что $\forall i, j \quad \sin \tau_{i,n} \leq \sin \tau_{j,n} + \left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|$,

$$\Sigma_+ \leq C''' \left(n^{\nu p-1} \sum_j \left|\Delta \widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p} \tau_{j,n} \sum_i \left(1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|\right)^{-\frac{2m-1}{2}p} + \right.$$

$$\left. + n^{\nu p-1} \cdot n^{-1-2\alpha+\nu p} \sum_j \left|\Delta \widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sum_i \left(1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|\right)^{-\frac{2m-1}{2}p+1+2\alpha-\nu p} \right),$$ и для достаточно

больших m, так как по (F) $n^{-1-2\alpha+\nu p}\le\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}$ $(1+2\alpha-\nu p\ge 0)$,

$$\Sigma_+\le\overline{C}_{\alpha;\beta;p;\nu}\overbrace{n^{\nu p-1}\sum_j\left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}}^{S}.$$

Оценим S. $\sum\limits_j(\ldots)=\sum\limits_{k=0}^{[\log_2 n]}\sum\limits_{j\in J_k}(\ldots)$, где $J_k=\{j:[x_j;x_{j+1})\subset E_k\}$. Пусть $\tau_{\bar{k},n}:=\arccos a_k$. $\forall j\in J_k$ $\sin\tau_{j,n}\le\sin\tau_{\bar{k},n}=\sqrt{1-a_k^2}\le 4\cdot 2^{-k}$. Покажем, что $\exists C>0:\forall j\in J_k\ \sin\tau_{j,n}\ge C\cdot 2^{-k}$. При $k=[\log_2 n]$ это следует из (F), а если $k<[\log_2 n]$, то $\sin\tau_{j,n}=\sqrt{1-x_{j,n}^2}>\sqrt{1-a_{k+1}^2}>0.5\cdot 2^{-k}$. Получили, что

$$\exists C_1,C_2>0:\forall j\in J_k\ C_1\cdot 2^{-k}\le\sin\tau_{j,n}\le C_2\cdot 2^{-k}. \qquad \text{(T)}$$

В $\sum\limits_{j\in J_k}(\ldots)$ модуль первой разности, $\left|\Delta\widetilde{L}_{n,\bar{j}_k}\right|=\left|C-0.5(A+B)\right|$, где $C=n\cdot 2^k\int\limits_{a_k}^{a_k+(n\cdot 2^k)^{-1}}f(t)dt$, $A=n\cdot 2^k\int\limits_{a_k-(n\cdot 2^{k-1})^{-1}}^{a_k-(n\cdot 2^k)^{-1}}f(t)dt$, $B=n\cdot 2^k\int\limits_{a_k-(n\cdot 2^k)^{-1}}^{a_k}f(t)dt$. Легко видеть, что $\left|\Delta\widetilde{L}_{n,\bar{j}_k}\right|\le n\cdot 2^k\int\limits_{a_k-(n\cdot 2^{k-1})^{-1}}^{a_k}\left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right)-f(t)\right|dt$. Если $p>1$, по неравенству Гёльдера $\left|\Delta\widetilde{L}_{n,\bar{j}_k}\right|^p\le\hat{C}_p n\cdot 2^k\int\limits_{a_k-(n\cdot 2^{k-1})^{-1}}^{a_k}\left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right)-f(t)\right|^p dt$. Аналогично, и для остальных $j\in J_k$ $\left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p\le C'_p n\cdot 2^k\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right)-f(t)\right|^p dt$. Значит, $\forall j\in J_k$

$$\left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p\le C''' n\cdot 2^k\left(\sin\tau_{l(j),n}\right)^{-2\alpha}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right)-f(t)\right|^p\rho(t)dt\ \left(l(j)=\begin{cases}j-1,&\alpha<0\\ j,&\alpha\ge 0\end{cases}\right).$$

Применив (T), $\left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p\sin^{2\alpha}\tau_{j,n}\le\overline{C'''}n\cdot 2^k\int\limits_{[x_{j-1};x_j]}\left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right)-f(t)\right|^p\rho(t)dt$.

Оценив $\sin^{1-\nu p}\tau_{j,n}$ в J_k сверху по (T): $\sum\limits_{j\in J_k}\left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}\le$

$$\le C'_{\alpha;\beta;p;\nu}n\cdot 2^k\cdot 2^{-k(1-\nu p)}\int\limits_{a_k-(n\cdot 2^{k-1})^{-1}}^{a_{k+1}-(n\cdot 2^k)^{-1}}\left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right)-f(t)\right|^p\rho(t)dt\le$$

$$\le\hat{C}n\cdot 2^{\nu pk}\int\limits_{-1}^{1-(n\cdot 2^k)^{-1}}\left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right)-f(t)\right|^p\rho(t)dt\le\overline{C}n\cdot 2^{\nu pk}\left(\frac{1}{n\cdot 2^k}\right)^{\nu p}=\overline{C}n^{1-\nu p}.$$

Отсюда $S \le C([\log_2 n]+1) \le C_3 \ln n$, и $\Sigma_+ \le \widetilde{C} \ln n$.

2) $1+2\alpha-\nu p<0$. $\forall i,j$ таких, что $\sin\tau_{i,n} \ne 0, \sin\tau_{j,n} \ne 0$, выполняется неравенство: $(\sin\tau_{i,n})^{-1} \le (\sin\tau_{j,n})^{-1} + |\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|(\sin\tau_{i,n}\cdot\sin\tau_{j,n})^{-1}$. Следовательно,

$$\Sigma_+ \le \ddot{C}_{\alpha;\beta;p;\nu}(n^{\nu p-1}\sum_j|\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}\cdot\sum_i(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)}+$$

$$+n^{2\alpha}\sum_j|\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}\cdot\sum_i\frac{\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{i,n}}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}p+1+2\alpha-\nu p}}).$$ Ввиду (F)

$\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{i,n} \le C_{\alpha;p;\nu} n^{\nu p-1-2\alpha}$, откуда $\Sigma_+ \le \ddot{C}_{\alpha;\beta,p;\nu} n^{\nu p-1}\sum_j|\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}\times$

$\times\sum_i((1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)}+(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)-1-2\alpha+\nu p})$; для достаточно больших m $\Sigma_+ \le C' n^{\nu p-1}\sum_j|\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n} = \dot{C}S$. Оценка S в (1) не зависела от знака $1+2\alpha-\nu p$, поэтому $\Sigma_+ \le \widetilde{C}'\ln n$.

Б. Σ_-: $x_{j,n}<0$ (вновь для краткости пишем $\sum_j(\ldots)$ вместо $\sum_{j:\,x_{j,n}<0}(\ldots)$)

Вместо $\sin^{2\alpha}\tau_{j,n}$ получим множитель $\sin^{2\beta}\tau_{j,n}$ для аналогичных целей.

1) $1+2\alpha-\nu p\ge 0$: $\Sigma_- = \sum_{j:\,-1<x_{j,n}\le-0.5}(\ldots)+\sum_{j:\,-0.5<x_{j,n}<0}(\ldots)=\Sigma_-^- + \Sigma_-^+$.

а) Оценим Σ_-^-: $\Sigma_-^- \le n^{\nu p-1}\sum_{j:\,-1<x_{j,n}\le-0.5}|\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p\sum_i(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)}$.

$\tau_{i,n}\le\frac{\pi}{2}$, а $\tau_{j,n}\ge\frac{2\pi}{3}$. Так как $|\tau_{i,n}-\tau_{i+1,n}|\ge\frac{1}{2n}$, то $1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|\ge\frac{n+|i-z|}{4}$, где $\tau_{z,n}=\arccos 0=0.5\pi$. Тогда для достаточно больших m

$$\sum_i(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)} \le C_{p;m}\sum_{k=0}^{\infty}(n+k)^{-0.5p(2m-1)} \le \overline{C}_{p;m} n^{-0.5p(2m-1)+1}.$$

Если $1+2\beta-\nu p\le 0$, то $\sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n}\ge 1\ge n^{-0.5p(2m-1)+1}$; значит, $\sum_i(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)}\le C_p\sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n}$. А если $1+2\beta-\nu p>0$, то по (F) $\sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n}\ge n^{-1-2\beta+\nu p}$; для достаточно больших m $n^{-0.5p(2m-1)+1}<n^{-1-2\beta+\nu p}$, и

$\sum_i(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)}\le C_{\beta;p,\nu}\sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n}$. Отсюда

$\Sigma_-^- \le Cn^{\nu p-1}\sum_{j:\,-1<x_{j,n}\le-0.5}|\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p\sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n}\le Cn^{\nu p-1}\sum_{j:\,-1<x_{j,n}\le 0}(\ldots)$, далее – как S в (А).

б) Оценим Σ_-^+. Начинаем, как для Σ_+ в (А): $\Sigma_-^+\le\ldots\le\overline{C}S$, где

$S = n^{\nu p-1} \sum\limits_{j: -0.5<x_{j,n}<0} \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}$. В S при добавлении в интегралы $\rho(x)$ вне их возникнут множители вида $\sin^{-2\beta}\tau_{j,n}$; $\tau_{j,n} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \left(\sin\tau_{j,n}\right)^{2(\alpha-\beta)} \le \widetilde{C}'''_{\alpha;\beta}$, и после замены соответствующие выражения оцениваются так же, как в (A).

Объединим оценки (а) и (б): $\Sigma_- = \Sigma_-^- + \Sigma_-^+ \le C'''\ln n$.

2) $1+2\alpha-\nu p<0$: снова, как в (1), $\Sigma_- = \sum\limits_{j: -1<x_{j,n}\le -0.5}(\ldots) + \sum\limits_{j: -0.5<x_{j,n}<0}(\ldots) = \Sigma_-^- + \Sigma_-^+$.

а) Σ_-^-: согласно (F), $\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{i,n} \le n^{-1-2\alpha+\nu p}$. Тогда

$\Sigma_-^- \le Cn^{\nu p-1} \sum\limits_{j: -1<x_{j,n}\le -0.5} \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p n^{-1-2\alpha+\nu p} \sum\limits_i \left(1+n\left|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}\right|\right)^{-0.5p(2m-1)}$. Как и в случае (1), для достаточно больших m $n^{-1-2\alpha+\nu p}\sum\limits_i \left(1+n\left|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}\right|\right)^{-0.5p(2m-1)} \le$

$\le C_{\alpha;\beta;p;\nu}\sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n} \Rightarrow \Sigma_-^- \le Cn^{\nu p-1} \sum\limits_{j: -1<x_{j,n}\le -0.5} \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n}$; далее – как в (1).

б) наконец, рассмотрим Σ_-^+. Начинаем оценивать, как Σ_+ в (A), и получаем: $\Sigma_-^+ \le C'n^{\nu p-1} \sum\limits_{j: -0.5<x_{j,n}<0} \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}$; далее – как S в (б) сл. (1).

Как видно из (A) и (Б), $D \le \overline{C}_{\alpha;\beta;p;\nu;m}\ln n$ для достаточно больших m: выбираем наименьшее такое m – оно зависит только от α, β, p, ν. Следовательно, установлено, что справедлива

Теорема 3 ($\cong$ [2, теорема 6]). $\forall f \in \hat{H}^{(\nu)}_{p,\rho}$, $p \ge 1$ *существует алгебраический полином* $P_n(x)$, *степень которого* $\le 2mn$ *(*m *зависит только от* α, β, p, ν*), такой, что* $\left\|\dfrac{F_{\tilde{n}}(f;x)-P_n(x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^\nu}\right\|_{L^p_\rho} \le C_{\alpha;\beta;p;\nu}\ln^{\frac{1}{p}} n$.

Следствием теорем 2, 3 и аксиомы треугольника для нормы является

Теорема 4а. $\forall f \in \hat{H}^{(\nu)}_{p,\rho}$, $p \ge 1$ *существует алгебраический полином* $P_n(x)$, *степень которого* $\le 2mn$ *(*m *зависит только от* α, β, p, ν*), такой, что*

$$\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^\nu}\right\|_{L^p_\rho} \le C_{\alpha;\beta;p;\nu}\ln^{\frac{1}{p}} n \Leftrightarrow \left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^\nu}\right\|_{L^p_\rho} \le C_{\alpha;\beta;p;\nu}\frac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^\nu}.$$

Выберем $\mu \in [0;\nu)$ и оценим $\left\|\dfrac{f(x)-F_{\tilde{n}}(f;x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^\mu}\right\|_{L^p_\rho}$, $\left\|\dfrac{F_{\tilde{n}}(f;x)-P_n(x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^\mu}\right\|_{L^p_\rho}$. Повторяя ход рассуждений из теоремы 2, $I = \int\limits_{-1}^{1}\left|\dfrac{f(x)-F_{\tilde{n}}(f;x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^\mu}\right|^p \rho(x)dx \le C'_{\alpha;\beta;p;\nu;\mu}n^{(\mu-\nu)p}$, а в теореме 3, поскольку $1+2\alpha-\mu p > 1+2\alpha-\nu p$, $D \le C''_{\alpha;\beta;p;\nu;\mu}n^{(\mu-\nu)p}$, и справедлива

Теорема 4b. $\forall f\in \hat{H}^{(v)}_{p,\rho}, p\ge 1, \mu\in[0;v)$ *существует алгебраический полином* $P_n(x)$ *степени* $\le 2mn$, *такой, что* $\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{r}}\right\|_{L^p_\rho} \le \frac{C_{\alpha;\beta;p;v;\mu}}{n^v}$.

Пусть $\gamma_m=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sin\frac{mt}{2}\right)^{2r+4}\left(m\sin\frac{t}{2}\right)^{-2r-4}dt$, $r\in N, m\in N$. Известно, что $K(t)=\gamma_m^{-1}\left(\sin\frac{mt}{2}\right)^{2r+4}\left(m\sin\frac{t}{2}\right)^{-2r-4}$ – чётный тригонометрический полином порядка $(r+2)(m-1)$, удовлетворяющий условиям: $\int\limits_{[-\pi;\pi]}K(t)dt=1$, $\int\limits_{[-\pi;\pi]}|t|^{\beta}K(t)dt\le Cm^{-\beta}, 0<\beta<2r+3$; если $f(x)\in L[-1;1]$, то $Q^*(\cos\theta)=\int\limits_{[-\pi;\pi]}f(\cos(\theta+t))K(t)dt$ – алгебраический полином, $\deg Q^*=(r+2)(m-1)$.

Лемма 5 ($\cong$ [3, лемма 1]). Если функция $f(x)$ обладает производной $f'(x)$ такой, что $\left(\int\limits_{-1}^{1}\left|\frac{f'(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{s}}\right|^p\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\le M<\infty$, $p\ge 1+2\alpha\ge 0$ и $p\ge 1+2\beta\ge 0$, то $\exists$ полином $Q(x)$ степени не выше n, для которого $I=\left(\int\limits_{-1}^{1}\left|\frac{f(x)-Q(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{s+1}}\right|^p\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{CM}{n}$, где C не зависит от n, $n\ge[s]+2$.

Доказательство. Пусть $m\in N$ – наибольшее число, для которого $(r+2)(m-1)\le n$, $r=[s]$ (тогда $(r+2)m\ge n$). В качестве $Q(x)$ возьмём $Q^*(\cos\theta)$; сделаем замену $x=\cos\theta$: $I=\left(2^{\alpha+\beta}\int\limits_{0}^{\pi}\left|\frac{f(\cos\theta)-Q^*(\cos\theta)}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{s+1}}\right|^p\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{2\beta}\sin\theta\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}}=$

$=C'_{\alpha;\beta,p}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}K(t)\frac{f(\cos\theta)-f(\cos(\theta+t))}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{s+1}}dt\right|^p\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\beta}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$. По обобщённому неравенству Минковского

$$I\le C'_{\alpha;\beta;p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K(t)\underbrace{\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(\cos\theta)-f(\cos(\theta+t))}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{s+1}}\right|^p\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\beta}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}}_{I_1}dt.$$ Для $t\ge 0$

$I_1=\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_{0}^{t}\frac{f'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{s+1}}du\right|^p\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\beta}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$. Опять применим это неравенство: $I_1\le\int\limits_{0}^{t}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{s+1}}\right|^p\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\beta}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}du=$

$$=\int_0^t\Bigl(\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f'(\cos(\theta+u))}{\left(|\sin(\theta+u)|+n^{-1}\right)^{s}}\right|^{p}\cdot\underbrace{\frac{\left(|\sin(\theta+u)|+n^{-1}\right)^{sp}|\sin(\theta+u)|^{p}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\alpha}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\beta}}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{(s+1)p}}}_{A}d\theta\Bigr)^{\frac{1}{p}}du.$$

Покажем, что $A\le C_1(1+mu)^{(s+1)p}\left|\sin\frac{\theta+u}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta+u}{2}\right|^{1+2\beta}$.

Так как $n\le m(r+2)$, $\frac{\left(|\sin(\theta+u)|+n^{-1}\right)^{sp}}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{sp}}\le\left(1+\frac{n|\sin u|}{1+n|\sin\theta|}\right)^{sp}\le(1+nu)^{sp}$, $|\sin(\theta+u)|^{p}=$ $=2^{p}\left|\sin\frac{\theta+u}{2}\right|^{p-(1+2\alpha)}\cdot\left|\cos\frac{\theta+u}{2}\right|^{p-(1+2\beta)}\cdot\left|\sin\frac{\theta+u}{2}\right|^{(1+2\alpha)}\cdot\left|\cos\frac{\theta+u}{2}\right|^{(1+2\beta)}$, то достаточно показать, что $B=\frac{\left|\sin\frac{\theta+u}{2}\right|^{p-(1+2\alpha)}\cdot\left|\cos\frac{\theta+u}{2}\right|^{p-(1+2\beta)}\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\beta}}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{p}}\le C''(1+nu)^{p}$. Используя неравенство $\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)\ge\frac{1}{3}\left(\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|+n^{-1}\right)\left(\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|+n^{-1}\right)$, получим ($0\le1+2\alpha\le p$, $0\le1+2\beta\le p$): $B\le C'\left(\frac{|\sin(0.5(\theta+u))|+n^{-1}}{|\sin(0.5\theta)|+n^{-1}}\right)^{p-(1+2\alpha)}\cdot\left(\frac{|\cos(0.5(\theta+u))|+n^{-1}}{|\cos(0.5\theta)|+n^{-1}}\right)^{p-(1+2\beta)}\le$ $\le C'\left(\left(1+\frac{nu}{1+n\sin^2(0.5\theta)}\right)\cdot\left(1+\frac{nu}{1+n\cos^2(0.5\theta)}\right)\right)^{p}\le C'(2+\pi)^{p}(1+nu)^{p}$, откуда $B\le C''(1+nu)^{p}$.

Значит, $I_1\le\int_0^t\Bigl(\frac{1}{2}\int_{-\pi+u}^{\pi+u}\left|\frac{f'(\cos(\theta+u))}{\left(|\sin(\theta+u)|+n^{-1}\right)^{s}}\right|^{p}\cdot\left|\sin\frac{\theta+u}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta+u}{2}\right|^{1+2\beta}d(\theta+u)\Bigr)^{\frac{1}{p}}\times$ $\times C_2(1+mu)^{s+1}du\le\int_0^t\Bigl(\frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{2\pi}(\ldots)d(\theta+u)\Bigr)^{1/p}\cdot C_2(1+mu)^{s+1}du\le C_3\int_0^t M(1+mu)^{s+1}du\le$ $\le C_3Mt(1+mt)^{s+1}$; $t\le0$ – аналогично. Значит, $I\le C_4M\int_{[-\pi;\pi]}|t|(1+m|t|)^{s+1}K(t)dt\le$ $\le C_5M\int_{[-\pi;\pi]}\left(|t|K(t)+m^{s+1}|t|^{s+2}K(t)\right)dt\le C_5M\left(\frac{C_1'}{m}+m^{s+1}\frac{C_2'}{m^{s+2}}\right)\le\frac{\overline{C}_5M}{m}\le\frac{\overline{C}M}{n}$.

Лемма 6 ($\cong$ [3, лемма 2]). Если $f(x)$ дифференцируема и $\left(\int_{-1}^{1}\left|\frac{f'(x)-P_{n-1}(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{s}}\right|^{p}\rho(x)dx\right)^{1/p}\le M<\infty$, где $P_{n-1}(x)$ – полином степени $\le(n-1)$, $p\ge1+2\alpha\ge0$ и $p\ge1+2\beta\ge0$, то для $n\ge[s]+2$ существует полином $Q_n(x)$ степени не выше n, такой, что $\left(\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x)-Q_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{s+1}}\right|^{p}\rho(x)dx\right)^{1/p}\le\frac{CM}{n}$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)=f(x)-\int_{[0;x]}P_{n-1}(u)du$, тогда $\varphi'(x)=f'(x)-P_{n-1}(x)\Rightarrow\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5, согласно которой $\exists Q_n^*(x)$: $\left\|\frac{\varphi(x)-Q_n^*(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{s+1}}\right\|_{L_\rho^p}=\left\|\frac{f(x)-Q_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{s+1}}\right\|_{L_\rho^p}\le\frac{CM}{n}$, где степень полинома

$Q_n(x) := Q_n^*(x) + \int\limits_{[0;x]} P_{n-1}(u)du$ не превосходит n; он и является искомым.

Теорема 5. *Пусть: 1)* $\alpha,\beta > -1$; $p \ge 1$; $r \in Z_+$; $0 < \nu \le 1$; *2)* $f(x) \in \hat{H}_{p,\rho}^{(r+\nu)}$; *3) если* $r > 0$, *то* $p \ge 1 + 2\alpha \ge 0$ *и* $p \ge 1 + 2\beta \ge 0$. *Тогда:*

а) $\exists C_{\alpha,\beta;p;r;\nu}$: $\forall n \ge r$ $\exists P_n(x)$ – *полином степени* $\le n$, *для которого*

$$\left\| \frac{f(x) - P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2} + n^{-1}\right)^{r+\nu}} \right\|_{L_\rho^p} \le C_{\alpha;\beta;p;r;\nu} \frac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^{r+\nu}}.$$

б) Если $0 \le \mu < \nu$, *то* $\exists C_{\alpha;\beta;p;r;\nu;\mu}$: $\forall n \ge r$ $\exists P_n(x)$ – *полином степени* $\le n$, *для которого* $\left\| \dfrac{f(x) - P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2} + n^{-1}\right)^{r+\mu}} \right\|_{L_\rho^p} \le C_{\alpha;\beta,p;r;\nu;\mu} n^{-r-\nu}$.

Доказательство. *(а)*: $f \in \hat{H}_{p,\rho}^{(r+\nu)} \Rightarrow f^{(r)} \in \hat{H}_{p,\rho}^{(\nu)}$. Пусть $K \in N$ таково, что $2mK \le n - r \le 2m(K+1)$. По теореме 4а $\exists$ полином $P_{K'}(x)$ степени $\le 2mK$: $\left\| \dfrac{f^{(r)}(x) - P_{K'}(x)}{\left(\sqrt{1-x^2} + K^{-1}\right)^{\nu}} \right\| \le C \dfrac{\ln^{\frac{1}{p}} K}{K^{\nu}}$. Поскольку $\left(\sqrt{1-x^2} + n^{-1}\right)^{-\nu} \le (4m + 2r)^{\nu} \left(\sqrt{1-x^2} + K^{-1}\right)^{-\nu}$,

$$\left\| \frac{f^{(r)}(x) - P_{K'}(x)}{\left(\sqrt{1-x^2} + n^{-1}\right)^{\nu}} \right\|_{L_\rho^p} \le C'_{\alpha;\beta;p;r;\nu} \left\| \frac{f^{(r)}(x) - P_{K'}(x)}{\left(\sqrt{1-x^2} + K^{-1}\right)^{\nu}} \right\|_{L_\rho^p} \le C''_{\alpha;\beta;p;r;\nu} \frac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^{\nu}} \left(\frac{n}{K}\right)^{\nu} \le C'''_{\alpha;\beta;p;r;\nu} \frac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^{\nu}}.$$

Если $r > 0$, применим r раз лемму 6: $\left\| \dfrac{f(x) - P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2} + n^{-1}\right)^{r+\nu}} \right\|_{L_\rho^p} \le \tilde{C}_{\alpha,\beta;p;r;\nu} \dfrac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^{r+\nu}}$, и $\deg P_n(x) \le n$.

Чтобы доказать *(б)*, рассуждаем аналогично, но вместо $\left(\sqrt{1-x^2} + N^{-1}\right)^{-\nu}$ берём $\left(\sqrt{1-x^2} + N^{-1}\right)^{-\mu}$, а вместо теоремы 4а – теорему 4b.

Библиографические ссылки

1. **Брудный Ю.А.** Приближение функций алгебраическими многочленами. / Ю.А. Брудный // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1968. – 32, №4 – С. 780-787.
2. **Моторный В.П.** Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L_p. / В.П. Моторный // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1971. – 35, №4 – С. 872-897.
3. **Потапов М.К.** О теоремах типа Джексона в метрике L_p. / М.К. Потапов // Докл. АН СССР – 1956. – 111, №6 – С. 1185-1188.
4. **Ульянов П.Л.** О рядах по системе Хаара. / П.Л. Ульянов // Матем. сб. – 1964 – 63, №3 – С. 356-391.
5. **Ульянов П.Л.** Вложение некоторых классов функций H_p^{ω}. / П.Л. Ульянов // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1968. – 32, №3 – С. 649-686.

Надійшла до редколегії 24.04.09

УДК 517, 681.31

А.В. Довженко, П.І. Когут

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

КВАЗІ-НАПІВНЕПЕРЕРВНА ЗНИЗУ РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ВІДОБРАЖЕНЬ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Запропоновано спосіб квазі-напівнеперервної знизу регуляризації відображень у банахових просторах.

Вступ. Добре відомим фактом теорії варіаційного числення є можливість побудови для довільної дійснозначної функції $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ її напівнеперервної знизу регуляризації виходячи з правила

$$\overline{f}(x) = \liminf_{y \to x} f(y). \qquad (1)$$

Проте у випадку, коли $f: E \to F$ є відображенням, де F є частково впорядкований нормований простір, властивість напівнеперервності можна означити в декількох, загалом, незалежних варіантах. Зокрема, це напівнеперервність знизу за конусом, квазі-напівнеперервність знизу, порядкова напівнеперервність та інші [1,4,8]. Кожна з таких характеристик, відіграє вагому роль у питаннях розв'язності відповідних задач векторної оптимізації. У зв'язку з цим є актуальною проблема резуляризації векторнозначних відображень. Оскільки операція $\liminf_{y \to x} f(y)$ в частково впорядкованих просторах є множиннозначною, то залучення правила (1) до їхньої резуляризації є неможливим.

Ця проблема була частково розв'язана в [6], де авторами запропонована схема напівнеперервної знизу регуляризації векторнозначних відображень, яка опирається на поняття границі послідовності множин за Пеневле-Куратовським, та є зручною для практичного застосування. Проте властивість напівнеперервності знизу є досить обмежливим припущенням у задачах нескалярної оптимізації [1,2,5]. Більш загальним класом відображень, залучення яких є коректним у задачах оптимізації, є квазі-напівнеперервні знизу відображення. Проблема їхньої регуляризації розглядалася в [7]. Проте, попри теоретичу простоту методу викладеного в [7], його практичне застосування є досить обмежливим. У зв'язку з цим метою даної роботи є дослідження проблеми квазі-напівнеперервної знизу регуляризації відображень $f: E \to F$, яка б була простою у застосуванні, та її порівняльний аналіз з напівнеперервним випадком.

Основні поняття та попередні результати. Нехай всюди далі E та F – дійснозначні векторні нормовані простори. Для довільної підмножини A в F через $\operatorname{int} A$ та $\operatorname{cl} A$ будемо позначати відповідно її внутрішність та замикання відносно топології індукованої нормою. Нехай у просторі F задано частковий порядок, який породжено замкненим загостреним конусом $\Lambda \subset F$, тобто

$y_1 \leq_\Lambda y_2 \Leftrightarrow y_2 \in y_1 + \Lambda$, де вважається, що $\Lambda \cap -\Lambda = \{0\}$. Позначимо через $F^\bullet$ розширення простору F невласним елементом $+\infty$, який назвемо *найбільшим елементом* простору F за конусом Λ. Насправді $+\infty$ є класом еквівалентності, який включає до себе всі граничні точки послідовностей $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$, які задовольняють умови:

(i) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежені за нормою простору,

(ii) $\forall b \in F \exists n_0 : b \not\geq_\Lambda f_n, \forall n > n_0$.

Надалі будемо казати, що підмножина $A \subset F$ є напрямленою за конусом Λ, якщо для будь-яких $a, b \in A$ існує елемент $c \in A$ такий, що $a \leq_\Lambda c, b \leq_\Lambda c$.

Елемент $y^* \in Y$ називають Λ-*мінімальним* на множині $Y \subset F$, якщо не існує жодного $y \in Y$ такого, що $y \leq_\Lambda y^*, y \neq y^*$, тобто $Y \cap (y^* - \Lambda) = \{y^*\}$. Елемент $\hat{y} \in Y \subset F$ називається Λ-найменшим елементом (або Λ-ідеальним мінімумом) множини Y, якщо $\hat{y} \leq_\Lambda y$, для всіх $y \in Y$. Далі будемо позначати його як $\hat{y} = \Lambda - \mathrm{IMin}\, Y$. Як випливає з наведеного означення, якщо для деякої множини $Y \subset F$ існує Λ-ідеальний мінімум, то він єдиний.

Нехай для певної множини A в F існує елемент $a \in F$ такий, що: 1) $a \geq_\Lambda b, \forall b \in A$; 2) $a \leq_\Lambda c$ для $c \in F$, тоді і тільки тоді, коли $b \leq_\Lambda c, \forall b \in A$. Тоді цей елемент називають *найменшою верхньою гранню* множини A за конусом Λ і позначають як $\sup A$. Аналогічним чином визначається найбільша нижня грань $\inf A$ множини A. Простір F називають *векторною решіткою* (ВР), якщо для будь-якої пари $a, b \in F$ існують $\sup\{a, b\}$ та $\inf\{a, b\}$. Якщо ж будь-яка обмежена підмножина простору F має найменшу верхню та найбільшу нижню грані, то F називають K-простором, або повною нормованою векторною решіткою.

Нагадаємо також поняття нижньої границі послідовності множин $\{A_n\} \subset F$ у сенсі Пенлеве-Куратовського. Кажуть, що $A \subset F$ є нижньою границею послідовності множин $\{A_n\}$ у сенсі Пеневле-Куратовського відносно τ-топології, якщо $A \subset \tau - \liminf\limits_n A_n$, де

$$\tau - \liminf_n A_n = \left\{ y \in F : y = \tau - \lim_n y_n, \exists n_0 : y_n \in A_n, \forall n \geq n_0 \right\}.$$

Квазі- та напівнеперервні знизу відображення. Метою даного пункту є порівняльний аналіз класів напівнеперервних знизу (нн. зн.) та квазі-напівнеперервних знизу (кв.-нн. зн) відображень $f : E \to F^\bullet$, що діють у парі нормованих просторів. Надалі вважатимемо, що базовою топологією простору E є топологія, індукована його нормою. Припускається, що F є топологічно двоїстим простором $F = V^*$ до повного нормованого (не обов'язково рефлексивного) сепарабельного простору V. Отже, за теоремою Банаха-Алаоглу, будь-яка обмежена послідовність в F є відносно компактною в

*-слабкій топології. Нагадаємо, що *-слабкою топологією на V^* називають локально опуклу топологію $\sigma(V^*,V)$ в якій лінійні функціонали $y \in V^*, y \mapsto \langle y,v \rangle_{V^*;V}$ неперервні. Тому надалі вважатимемо, що F є топологічним простором $\langle F, \sigma(F,V) \rangle$.

Як відомо, у векторнозначному випадку існує декілька можливих шляхів для узагальнення класичного поняття напівнеперервності знизу скалярнозначних відображень $f : E \to \mathbb{R}$. До найбільш відомих, можна віднести наступні:

Означення 1. [8] Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ називається нн. зн. в точці $x_0 \in \operatorname*{Dom}_{x \in E} f := \{x \in E \mid f(x) <_{\Lambda} +\infty\}$ якщо для будь-якого околу нуля ϑ у F існує окіл $\mathfrak{A} \in E$ точки x_0 такий, що $f(\mathfrak{A}) \subset f(x_0) + \vartheta + \Lambda \cup \{+\infty\}$.

Означення 2. [3] Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ називається кв.-нн. зн. в точці $x_0 \in \operatorname*{Dom}_{x \in E} f$, якщо для будь-якого елемента $b \in F$, такого, що $b \not\geq_{\Lambda} f(x_0)$, існує окіл $\mathfrak{A} \in E$ точки x_0 такий, що $b \not\geq_{\Lambda} f(x)$, для будь-якого $x \in \mathfrak{A}$.

Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ називають (квазі-)нн. зн. на множині E, якщо воно є (квазі-) нн. зн. в кожній точці цієї множини. Оскільки *-слабка топологія є метризованою в F, то наведені вище означення можна подати у секвенційній формі.

Означення 3. [6]Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ є нн. зн. в точці x_0 у тому і тільки тому разі, коли для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, що збігається до x_0, існує послідовність $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in F$, що $\sigma(F,V)$–збігається до $f(x_0)$ така, що $b_n \leq_{\Lambda} f(x_n)$.

Означення 4. Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ є кв.-нн. зн. в x_0 тоді і тільки тоді, коли для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, що збігається до x_0, та для будь-якого елемента $b \in F$, такого, що $b \not\geq f(x_0)$, існує число $\hat{n} \in \mathbb{N}$ таке, що $b \not\geq_{\Lambda} f(x_n)$ при всіх $n \geq \hat{n}$.

Означення 5. Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ є нн. зн. в x_0 тоді і тільки тоді, коли для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, що збігається до x_0, та для будь-якого околу нуля ϑ в $\langle F, \sigma(F,V) \rangle$ існує число $\hat{n} \in \mathbb{N}$ таке, що $f(x_n) \subset f(x_0) + \vartheta + \Lambda \cup \{+\infty\}$ для всіх $n \geq \hat{n}$.

Як показано в [3], у випадку, коли E та F є банаховими просторами, а F напівупорядковано $\sigma(F,V)$–замкненим загостреним конусом Λ, то для довільного відображення $f : E \to F^{\bullet}$ з його напівнеперервності знизу випливає властивість його квазі-напівнеперервності знизу. Наступний приклад ілюструє, що замкнутість конуса є суттєвим обмеженням.

Приклад 1. Розглянемо відображення $f:[1,3]\to\mathbb{R}^2$ де

$$f(x)=\begin{cases}(x,2), & \text{якщо } x\in[1,2)\\ (x,1), & \text{якщо } x\in[2,3]\end{cases},$$

а простір $\mathbb{R}^2$ напіввпорядкований незамкненим загостреним конусом $\Lambda=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1>0, x_2>0\right\}\cup(0,0)$. Тоді, як легко бачити, відображення f буде нн. зн. в точці $x_0=2$, проте не буде кв.-нн. зн. в цій точці.

Для того, щоб отримати умови, які б гарантували справедливість оберненої імплікації «квазі-нн. зн.$\Rightarrow$ нн. зн.», наведемо деякі додаткові поняття.

Нехай $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ – довільна послідовність у F. Позначимо через $L\{y_k\}$ – множину всіх її $\sigma(F,V)$–кластерних точок, тобто $y\in L\{y_k\}$, якщо знайдеться підпослідовність $\left\{y_{k_i}\right\}_{i=1}^{\infty}\subset\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $y_{k_i}\xrightarrow{*}y$ у F при $i\to\infty$. Нехай $f:E\to F^\bullet$ – довільне відображення, $x_0\in E$ довільний елемент його області визначення. Покладемо $L(f(x_0))=\bigcup\limits_{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\to x_0} L(f(x_n))$, де операція об'єднання розглядається на множині всіх послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ таких, що $x_n\to x_0$ сильно в E. Характерною рисою квазі-нн. зн. відображень є наступний результат:

Лема 1. [2] Якщо відображення $f:E\to F^\bullet$ є кв.-нн. зн. в точці $x_0\in E$, то $f(x_0)$ є Λ-найменшим елементом множини $L(f(x_0))$, тобто

$$f(x_0)=\Lambda-\mathrm{IMin}\,L(f(x_0)).$$

Тепер установимо справедливість наступного результату.

Теорема 1. *Нехай* F *напівупорядковано* $\sigma(F,V)$*-замкненим загостреним конусом* Λ. *Якщо відображення* $f:E\to F^\bullet$ *є локально обмеженим, то з кв.-нн. зн.* f *в точці* x_0 *випливає його нн. зн. в цій точці.*

Доведення. Покажемо, що для будь-якого околу нуля ϑ в топологічному просторі $\langle F,\sigma(F,V)\rangle$ знайдеться окіл точки x_0: $\mathfrak{A}(x_0)\subset E$ такий, що

$$f(\mathfrak{A}(x_0))\subset f(x_0)+\vartheta+\Lambda\cup\{+\infty\}. \tag{2}$$

Припустимо обернене, а саме нехай існує окіл ϑ такий, що $\forall\mathfrak{A}(x_0)\subset E$ знайдеться елемент $\bar{x}\in\mathfrak{A}(x_0)$ на якому

$$f(\bar{x})\notin f(x_0)+\vartheta+\Lambda\cup\{+\infty\}. \tag{3}$$

Отже існує послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in E$ така, що $x_n\to x_0$ і при цьому $f(\bar{x}_n)\notin f(x_0)+\vartheta+\Lambda\cup\{+\infty\}\quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Оскільки відображення f є локально обмеженим, то існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, що $\{f(x_{n_k})\} \xrightarrow{*} f^* \in F$, $\|f^*\|_F < +\infty$.

З того, що f кв.-нн. зн. в точці x_0, за лемою 1, маємо: $f(x_0) = \Lambda - \mathrm{IMin}\, L(f(x_0))$. Отже, $f^* \in f(x_0) + \Lambda$. Проте, в цьому випадку для будь-якого околу нуля $\vartheta \in F$, справедливе включення
$f^* + \vartheta \subset f(x_0) + \vartheta + \Lambda \cup \{+\infty\}$.

Отже, з того, що послідовність $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ $\sigma(F,V)$-збігається до f^* отримаємо: $\forall \vartheta \in \langle F, \sigma(F,V)\rangle$ знайдеться число $\bar{k} \in \mathbb{N}$, при якому
$f(x_{n_k}) \in f(x_0) + \vartheta + \Lambda \cup \{+\infty\} \quad \forall k > \bar{k}$,
що, у свою чергу, суперечить співвідношенню (2). Отже припущення (3) є хибним, тому відображення f є нн. зн. в точці x_0. Теорема доведена.

Наслідок 1. За умов теореми 1 поняття напівнеперервності знизу та квазі-напівнеперервності знизу співпадають.

Як показує наступний приклад, умова локальної обмеженості відображення f у теоремі 1 є суттєвою.

Приклад 2. Нехай $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, де $g(x) = \begin{cases} (0,0), & \text{якщо } x = 0 \\ \left(-1, \frac{1}{|x|}\right), & \text{в іншому випадку}, \end{cases}$

а простір $\mathbb{R}^2$ напівупорядкований конусом невід'ємних елементів Λ:
$\Lambda = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$.

Легко бачити, що в точці $(0,0)$ умова нн. зн. не виконується, в той час як відображення g залишається квазі-нн. зн. в усіх точках простору $\mathbb{R}$.

Покажемо також, що суттєвою в теоремі 1 є умова, яка накладається на простір F, а саме, що існує банахів сепарабельний простір V до якого F є топологічно двоїстим, що породжує *-слабку топологію в F.

Приклад 3. Нехай банахів простір $F = L^1(-1,1)$ з сильною топологією напіввпорядковано конусом невід. ел. $\Lambda := \left\{ f(t) \in L^1(-1,1) \mid f(t) \overset{\text{м с}}{\ge} 0 \text{ в } (-1,1) \right\}$.

Розглянемо відображення $h: [-1,1] \to L^1(-1,1)$, означене як

$$h(x) = \begin{cases} 1 + |x|, & x \ne 1/n, n \in \mathbb{N} \\ u_n(t), & x = 1/n, n \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad \text{де} \quad u_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \in [-1, -1/n) \cup (1/n, 1], n \in \mathbb{N} \\ n, & t \in [-1/n, 1/n], n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Неважко переконатися, що відображення h обмежене за нормою простору $L^1(-1,1)$, а тому є локально обмеженим: $\|h(x)\| \le 3, x = \frac{1}{n}, \|h(x)\| \le 4, x \ne \frac{1}{n}$.

Покажемо, що відображення h є кв.-нн. зн. в точці $x_0 = 0$, тобто для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E = [-1,1]$, що збігається до $x_0 = 0$, та для будь-якого елемента $b(t) \in F$, такого, що $b \not\ge_\Lambda h(x_0) := 1, t \in (-1,1)$, існує число $\hat{n} \in \mathbb{N}$ таке, що $b \not\ge_\Lambda h(x_n)$ для будь-якого $n \ge \hat{n}$. У даному випадку маємо дві характерні послідовності, які збігаються до точки $x_0 = 0$:

(i) $\{x_n\}_n \ne \{\frac{1}{n}\}_n$, тоді $h(x_n) = 1 + |x_n| \xrightarrow{x_i \to 0} 1 = h(0)$ за нормою простору $L^1(-1,1)$;

(ii) $\{x_n\}_n = \{\frac{1}{n}\}_n$, тоді який би елемент $b \in L^1(-1,1)$ не обрати, знайдеться номер $\hat{n}$ такий, що

$$h(x_n)(t) = n > b(t) + 1, \text{ для } t \in [-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}], \forall n \ge \hat{n}. \tag{4}$$

Оскільки Лебегова міра множини $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ для довільного n строго більше нуля, то $b \not\ge_\Lambda h(x_n), \forall n \ge \hat{n}$. Отже, відображення h є кв.-нн. зн. в точці $x_0 = 0$. Проте h не є нн. зн. відображенням. Дійсно, візьмемо за окіл нуля наступну множину $\vartheta : \left\{\|v\|_{L^1(-1,1)} \le \frac{1}{8}\right\}$. Тоді для послідовності $x_n = \frac{1}{n}$, що збігається до $x_0 = 0$, маємо:

$h(x_n) = u_n(t) \notin 1 + \vartheta + \Lambda \cup \{+\infty\}, \forall n \ge 2$, бо $u_n(t) = \frac{1}{2}$ на $(-1, -\frac{1}{n}) \cup (\frac{1}{n}, 1)$, у той час коли $h(0) = 1$.

Геометричний зміст кв.-нн. знизу. Для подальшого аналізу властивості квазі-напівнеперервності знизу наведемо ряд допоміжних понять. Зауважимо, що надалі ми будемо розглядати лише загострені і замкнуті відносно топології простору F конуси.

Означення 6. Нехай $f : E \to F^\bullet$ – задане відображення і послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$ є такою, що $x_n \to x_0$ в E. Будемо казати, що $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Λ_f – збігається до $x_0 \in E$ і позначати цей факт, як $x_n \xrightarrow{\Lambda_f} x_0$, $n \to +\infty$, якщо виконується одна з двох умов:

(i) послідовність $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена за нормою у просторі F;

(ii) послідовність $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежена за нормою простору F, проте існують такі $\hat{n} \in \mathbb{N}$ та елемент $b \in F$ такі, що $f(x_n) \le_\Lambda b, \forall n \ge \hat{n}$.

Зрозуміло, що будь-яка стаціонарна послідовність власних точок відображення f є Λ_f-збіжною.

Означення 7. Для довільних $f: E \to F^{\bullet}$ та $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$ множину $A_{x_0}^f = \left\{ y \in F \mid \forall \{x_n\} \xrightarrow{\Lambda_f} x_0, \exists \{b_n\} \xrightarrow{*} y : b_n \leq_\Lambda f(x_n) \right\}$ будемо називати *множиною нижнього рівня* відображення f у точці x_0.

Покажемо результат, який пов'язує властивість кв.-нн. знизу та специфіку множини нижнього рівня A_x^f.

Теорема 2. *Нехай* F *є повною нормованою векторною решіткою відносно* $\sigma(F,V)$*-замкненого конуса* Λ. *Тоді для заданих* $f: E \to F^{\bullet}$ *та* $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$, *маємо:*

$$f(x_0) \in A_{x_0}^f \Leftrightarrow f \text{ –кв.-нн. зн. в точці } x_0.$$

У загальному випадку, коли F є довільним нормованим простором, має місце наступний результат, доведення якого легко відтворити за схемою роботи [6].

Твердження 1. Нехай E банахів простір, $f: E \to F^{\bullet}$, а топологічний простір $\langle F, \sigma(F,V) \rangle$ напівупорядковано $\sigma(F,V)$ замкненим загостреним конусом Λ. Нехай $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$. Тоді

1. $A_{x_0}^f = A_{x_0}^f - \Lambda$;
2. f є кв.-нн. зн. в т. $x_0 \Leftrightarrow A_{x_0}^f = f(x_0) - \Lambda$;
3. якщо f кв.-нн. зн. в т. x_0, то $f(x_0) \in A_{x_0}^f$;
4. якщо F–повна банахова решітка, то $A_{x_0}^f$–напрямлена вгору множина.

Квазі-напівнеперервна знизу регуляризація відображень. У даному пункті пропонується процедура кв.-нн. знизу регуляризації довільних векторнозначних відображень зі значеннями у просторі $F = V^*$, який є банаховою решіткою відносно часткового порядку породженого конусом Λ. Наводиться також порівняння зі схемою кв.-нн. знизу регуляризації, яка запропонована у [7]. При чому зауважимо, що результати регуляризації за схемою [7] збігаються з результатами, запропонованими в даній роботі.

Означення 8. Для будь-якого відображення $f: E \to F^{\bullet}$ найбільше з кв.-нн. зн. відображень, які не перевищують f, називається його кв.-нн. зн. регуляризацією.

Для довільної точки $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$, маємо $A_x^f \neq \varnothing$ і при цьому A_x^f-обмежена зверху множина. Покладемо $I_f(x) := \sup A_x^f$. У разі, коли для довільного x існують лише не Λ_f-збіжні послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, образи яких

$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежені за нормою, то $A_x^f = \varnothing$. Отже, в цьому випадку $I_f(x) := +\infty$. Таким чином, відображення $I_f(x) : E \to F$ є означеним при всіх $x \in E$. Нижче будуть установлені умови, за яких є кв.-нн. зн. регуляризацією відображення f. Почнемо з наступного допоміжного результату:

Лема 2. [6] Нехай конус Λ має непусту внутрішність і відображення $f : E \to F^{\bullet}$ є локально обмеженим у x_0. Тоді $I_f(x) \in \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f$ і при цьому для будь-якого $y \in \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f$ такого, що $I_f(x_0) - y \in \mathrm{int}\, \Lambda$ (надалі таке відношення позначатимемо як $y \prec_\Lambda I_f(x_0)$), існує послідовність $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f$, яка задовольняє умови: $\beta_k \xrightarrow{*} I_f(x_0)$ та $y \prec_\Lambda \beta_k, \forall k$, де через cl позначено операцію замикання в $\sigma(F, V)$-топології.

Зауважимо, що для довільного $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$ мають місце співвідношення

$$\mathrm{cl}\, E_f(x_0) = H_f(x_0),\ A_{x_0}^f \subset \mathrm{cl}\, E_f(x_0) = H_f(x_0) = \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f,$$

де відповідні множини означені як

$$E_f(x_0) := \left\{ y \in A_{x_0}^f \mid y \prec_\Lambda I_f(x_0) \right\},\ H_f(x_0) := \left\{ y \in \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f \mid y \le_\Lambda I_f(x_0) \right\}.$$

Лема 3. Нехай Λ – $\sigma(F, V)$–замкнутий конус з непустою внутрішністю. Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ –довільна послідовність, яка Λ_f-збігається x_0. Тоді $A_{x_0}^f$ є нижньою границею за Пеневле-Куратовським послідовності множин $\left\{ A_{x_k}^f \right\}_{k=1}^{\infty}$ відносно $\sigma(F, V)$-топології.

Доведення. Для цього достатньо показати, що $y \in \liminf_k A_{x_k}^f$ для довільного $y \in E_f(x_0)$. Оскільки $y \prec_\Lambda I_f(x_0)$, то за лемою 2, знайдуться $\{\beta_k\} \in \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f$ такі, що $\beta_k \xrightarrow{*} I_f(x_0)$ та $y \prec_\Lambda \beta_k, \forall k$. Нехай $y_k \xrightarrow{*} y, y_k \prec_\Lambda y, \forall k$. Тоді

$$\exists \delta_0 > 0 : \forall k, y_k \le_\Lambda f(x) \forall x \in B(x_0, \delta_0), \tag{5}$$

інакше для будь-якого $\delta > 0$ існували б число k і точка $x_\delta \in B(x_0, \delta_0)$ такі, що $f(x_\delta) - y_k \notin \Lambda$.

У цьому випадку $f(x_\delta) - y_k \in y_k - y + F \setminus \Lambda \in -\Lambda + F \setminus \Lambda = F \setminus \Lambda$, що неможливо.

Покажемо тепер, що $y_k \in A_{x_k}^f$. Для кожного k побудуємо послідовності $\left\{ x_k^n \right\}_n \to x_k$. Тоді знайдеться $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $x_k^n \in B(x_k, \frac{\delta_0}{2}) \forall n \ge n_0$ і $\forall k \ge n_0$.

Нехай $\left\{z_k^n\right\}_{n=1}^{\infty}$–довільна послідовність, яка $\sigma(F,V)$-збігається до y_k і при цьому $z_k^n \leq_\Lambda y_k$. Нехай також $y_k^n = \begin{cases} z_k^n, & n \geq n_0 \\ f(x_k^n), & n < n_0. \end{cases}$

Вважаючи, що $x_k \in B(x_0, \frac{\delta_0}{2})\ \forall k \geq n_0$, маємо $x_k^n \in B(x_0, \delta_0)\ \forall k, n \geq n_0$. Звідки, у силу (5), отримуємо $y_k^n \leq_\Lambda f(x_k^n) \forall k, n \geq n_0$. Отже $y_k \in A_{x_k}^f\ \forall k \geq n_0$. Таким чином $y \in \liminf_k A_{x_k}^f$, з чого випливає, що

$$E_f(x_0) \subset \liminf_k A_{x_k}^f.$$

Оскільки $\liminf_k A_{x_k}^f$ є $\sigma(F,V)$-замкнутою множиною, то $E_f(x_0) \subset \liminf_k A_{x_k}^f$. У результаті $A_{x_0}^f \subset \liminf_k A_{x_k}^f$, що і потрібно було встановити. Лема доведена.

Зауважимо, що надалі ми будемо розглядати лише конуси з непустою внутрішністю.

Означення 9. Будемо казати, що відображення $f: E \to F^\bullet$ є секвенційно кв.-нн. зн. в точці $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ якщо

$$\forall \{x_n\} \xrightarrow{\Lambda_f} x_0\ \exists \{b_n\} \xrightarrow{*} f(x_0), b_n \leq_\Lambda f(x_n).$$

Лема 4. Нехай $f: E \to F^\bullet$, $F = V^*$ – банахова решітка відносно $\sigma(F,V)$-замкнутого загостреного конуса Λ з непустою внутрішністю. Нехай $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ і відображення f локально обмежене в x_0. Тоді з кв.-нн. зн. в т. x_0 відображення f випливає, що для будь-якої послідовності $\{x_n\} \to x_0$ виконується умова:

$$\forall \vartheta \subset F\ \exists \hat{n}: f(x_n) \in f(x_0) + \vartheta + \Lambda, \forall n > \hat{n},$$

де ϑ–окіл нуля у просторі $\langle F, \sigma(F,V) \rangle$.

Доведення. Припустимо обернене. Нехай існує послідовність $\{x_n\}_n \to x_0$ така, що

$$\exists \vartheta_0\ \forall n \in \square\ \exists k > n: f(x_k) \notin f(x_0) + \vartheta_0 + \Lambda. \tag{6}$$

Оскільки, за вихідними припущеннями, послідовність $f(x_n)$ є локально обмеженою, то виходячи з теореми Банаха-Алаоглу, можна вибрати *-слабко збіжну в F послідовність $\{f(x_k)\}_{k=n}^{\infty}$, яка задовольнятиме умову (6). Проте для її границі f^* одержимо $f^* \not\geq_\Lambda f(x_0)$, що суперечить лемі 1.

Твердження 2. За умов леми 4, означення 4 і 9 є тотожними.

Доведення. Озн.4 $\Rightarrow$ Озн.9. За означенням 4, для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, яка збігається до x_0, та для будь-якого елемента $b \in F$, такого, що $b \not\geq_{\Lambda} f(x_0)$, випливає існування такого числа $\hat{n} \in \mathbb{N}$, що $b \not\geq_{\Lambda} f(x_n)$, для будь-якого $n \geq \hat{n}$. Тоді, за лемою 4, $\forall x_n \xrightarrow{\Lambda_f} x_0$, маємо

$$\forall \vartheta \exists n_0 : f(x_n) \in f(x_0) + \vartheta + \Lambda, \forall n \geq n_0 .$$

Спираючись на теорему 2, можна показати, що послідовність $b_n = \inf\{f(x_n), f(x_0)\}$ задовольняє умовам $b_n \xrightarrow{*} f(x_0)$ і $b_n \leq_{\Lambda} f(x_n)$. Тим самим, за означенням 9, відображення $f : E \to F^{\bullet}$ є секвенційно кв.-нн. зн. в точці $x_0 \in \operatorname{Dom} f$. Для доведення оберненого твердження: Озн.9 $\Rightarrow$ Озн.4, досить скористатися теоремою 2.

Теорема 3. *За умов леми 4 відображення* $I_f : E \to F^{\bullet}$ *кв.-нн. зн. в кожній точці ефективної множини* $\operatorname{Dom} f$.

Доведення. Нехай $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ і нехай $\{x_n\} \xrightarrow{\Lambda_f} x_0$ – довільна послідовність. Тоді за лемою 2 існує послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \operatorname{cl} A_{x_0}^{f}$ така, що $\{y_k\} \xrightarrow{*} I_f(x_0)$. Проте, враховуючи лему 3 та той факт, що нижня границя за Пеневле-Куратовським є $\sigma(F,V)$-замненою множиною, маємо $y_k \in \liminf_k A_{x_n}^{f}$ при всіх $k \in \mathbb{N}$. Тоді для кожного фіксованого $k \in \mathbb{N}$ знайдуться послідовності $\left\{y_k^n \in A_{x_n}^{f}\right\}_n$ такі, що $y_k^n \xrightarrow{*} y_k$ при $n \to \infty$. Ясно, що $y_k^n \leq_{\Lambda} \sup A_{x_n}^{f} = I_f(x_n)$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. Нехай $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є відображенням таким, що $k(n) \to \infty$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $b_n = y_{k(n)}^n \, \forall n \in \mathbb{N}$. Тоді $b_n \xrightarrow{*} I_f(x_0)$ і при цьому $b_n \leq_{\Lambda} I_f(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$. Тим самим показано, що за означенням 9 відображення I_f є секвенційно кв.-нн. зн. в точці x_0. Для завершення, досить скористатися твердженням 2.

Теорема 4. *За умов леми 4* $I_f : E \to F^{\bullet}$ *є кв.-нн. зн. регуляризацією відображення* f.

Доведення. Нехай $g : E \to F^{\bullet}$ довільне кв.-нн. зн. відображення, яке задовольняє умову $g(x) \leq_{\Lambda} f(x), \forall x \in E$. Виходячи з означень 6–7, маємо $A_x^g \subset A_x^f, \forall x \in E$, оскільки Λ_f-збіжність довільної послідовності $\{x_n\}_n \subset E$ гарантує її Λ_g-збіжність. Оскільки відображення $g : E \to F^{\bullet}$ кв.-нн. зн., то за твердженням 1 (див. пункт 3) $g(x) \in A_x^g$ при всіх $x \in \operatorname{Dom} f$. Отже $I_f(x) = \sup A_x^f \geq_{\Lambda} g(x)$, що і доводить теорему.

Отримані результати дають підстави започаткувати наступну концепцію:

Означення 10. Будемо казати, що елемент $\xi \in E$ є нижньою (за конусом Λ) q-границею відображення $f: E \to F^{\bullet}$ у точці $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, якщо $\xi = I_f(x_0) := \sup A^f_{x_0}$. При цьому будемо залучати наступне позначення

$$\xi = \liminf_{x \to x_0} {}^q_\Lambda f(x).$$

Суттєвим є той факт, що на відміну від існуючих узагальнень поняття нижньої границі відображень зі значеннями в частково впорядкованих просторах [5], операція $\liminf\limits_{x \to x_0} {}^q_\Lambda$ не є множиннозначною. Більше того, як прямий наслідок встановлених вище результатів, можемо зробити наступний висновок:

Теорема 5. *За умов леми 4 є еквівалентними наступні твердження:*

1. *відображення* $f: E \to F^{\bullet}$ *кв.-нн. зн. в точці* $x_0 \in E$*;*
2. $f(x_0) \leq_\Lambda \liminf\limits_{x \to x_0} {}^q_\Lambda f(x)$.

Наведемо тепер процедуру регуляризації, яка запропонована в [7]. Нехай $f: E \to F^{\bullet}$, де F-банаховий простір, який є повною нормованою векторною решіткою, та який упорядковано замкненим загостреним конусом Λ з непустою внутрішністю. Тоді квазі-напівнеперервна знизу регуляризація f_* випуклого відображення f визначається, як

$$f_*(x) = \inf\left\{y \in F^{\bullet} \mid (x, y) \in \operatorname{cl} \operatorname{epi}(f)\right\}, \tag{7}$$

де $\operatorname{epi}(f) = \left\{(x, y) \in E \times F^{\bullet} \mid y \geq_\Lambda f(x)\right\}$.

Зауважимо що такий спосіб регуляризації, по суті, грунтується на наступному факті: якщо конус Λ має непусту внутрішність, то властивість квазі-напівнеперервності відображення суть еквівалентна замкненості його надграфіка, проте операція замикання в нескінченновимірних просторах є досить нетривіальною, до того ж його можна застосувати лише для випуклих відображень, а отже залучення цього підходу є досить обмежливим з практичної точки зору. Разом з тим виходячи з означення 8 та теореми 4 легко бачити, що квазі-напівнеперервна знизу регуляризація у сенсі означення 8 є еквівалентною до регуляризації за правилом (7).

Заключні зауваження. Оскільки метод кв.-нн. знизу регуляризації, що запропонований у даній роботі, опирається на метод нн. знизу регуляризації [6], наведемо приклад, який ілюструє їхню суттєву відмінність. Нехай відображення $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ означене як (рис. 1)

$$f(x)=\begin{cases}\left(-1,\frac{1}{|x|}\right), & x<0;\\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), & x=0;\\ (x,-1), & x>0.\end{cases}$$

Нехай частковий порядок в $\mathbb{R}^2$ задається конусом невід'ємних елементів $\Lambda=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\geq 0, x_2\geq 0\right\}$.

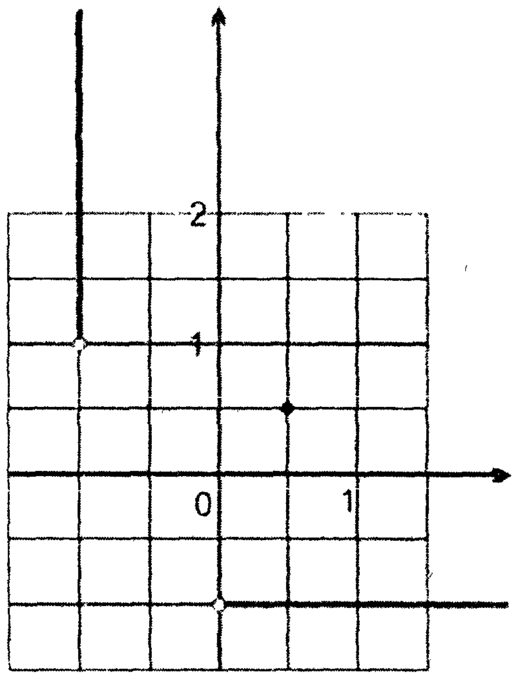

Рис.1

Легко бачити, що в точці $x=0$ відображення f не є ні напівнеперервним знизу, ані квазі-напівнеперервним знизу. Побудуємо його кв.-нн. знизу регуля-ризацію, виходячи з теореми 4. Для цього зауважимо, що жодна з послідовнос-тей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, які збігаються до точки 0 зліва не є Λ_f-збіжною. Проте, послідов-ності, які збігаються до 0 справа, є Λ_f-збіжними. і при цьому кожна з них є такою, що $f(x_n)\to[0,-1]^T$ і $f(x_n)\geq_\Lambda [0,-1]^T$ при всіх $n\in\mathbb{N}$. Оскільки $f(0)=\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^T\geq_\Lambda[0,-1]^T$, то для будь-якого вектора $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2\leq_\Lambda[0,-1]^T$ стаціонарна послідовність $\{b_n=(y_1,y_2)\}_n$ задовольняє умову $b_n\leq_\Lambda f(x_n)$, для всіх Λ_f-збіжних до 0 послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Отже $A_{x=0}^f=[0,-1]^T-\Lambda$.

Таким чином, кв.-нн. знизу регуляризацією для f буде наступне відображення

$$I_f(x)=\begin{cases}\left(-1,\frac{1}{|x|}\right), & x<0;\\ (0,-1), & x=0;\\ (x,-1), & x>0.\end{cases}$$

Разом з тим, залучаючи метод запропонований в [6], отримаємо нн. зн. регуляризацію для f у вигляді

$$I_f^*(x)=\begin{cases}\left(-1,\frac{1}{|x|}\right), & x<0;\\ (-1,-1), & x=0;\\ (x,-1), & x>0.\end{cases}$$

Легко бачити, що $I_f(x)\geq_\Lambda I_f^*(x)\,\forall x\in\mathbb{R}$ (зокрема $I_f(0)\succ_\Lambda I_f^*(0)$), що є типовим співвідношенням між запропонованою квазі-нн. зн. регуляризацією, та нн. зн. регуляризацією з [6].

Бібліографічні посилання

1. **Когут П. І.** До питання регуляризації задач векторної оптимізації /П.І. Когут, І.В. Нечай// Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика, –2008, –Т.16, № 6, С. 149–154.
2. **Когут П. І.** Про скаляризацію одного класу задач векторної оптимізації в банахових просторах /П. І., Когут, І.В. Нечай// Проблемы управления и информатики, –2008, –№ 6, С. 45–63.
3. **Borwein J.** Conjugate convex operators /J.Borwein, J.Penot, M.Thera// J.Math. Anal. Appl., –1984, -Vol. 102, 399–414.
4. **Finet C.** Vector-value Variational Principles, Preprint #4 /C.Finet, L.Quarta, C.Troestler// January 19, Institute de Mathematique et d'Informatique, Universite de Mons-Hainaut, –2001.
5. **Kogut P.I.** On the existence of efficient solutions to vector optimization problems in Banach spaces /P.I.Kogut, R.Manzo, I.V.Nechay// Диференціальні рівняння та їх застосування, ДНУ,–2008, С.107–124.
6. **Mansour M. Ait** Lower semicontinuous regularization for vector-valued mappings /M. Ait Mansour, A. Metrane, M. Thera// Rapport de recherche, Universite de Limoges, –2004.
7. **Mansour M. Ait** On theSemicontinuity of Vector-Valued Mappings /M. Ait Mansour, C. Malivert, M. Thera// Rapport de recherche,Universite de Limoges, 2004.
8. **Penot J.P.** Semicontinuous mappings in general topology /J.P.Penot, M.Thera// Arch.Math., 38(1982), 158–166.

Надійшла до редколегії 14 01.09

УДК 517.5

Л.В.Елец
Институт прикладной математики и механики НАН Украины

ОЦЕНКА СНИЗУ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РАДИУСА ПОМПЕЙЮ ДЛЯ ПОЛОВИНЫ КОНУСА

Знайдено оцінки знизу найменшого радіуса кулі, в якому дана множина є множиною Помпейю. В якості множини розглядається половина прямого кругового конуса з радіусом основи 1 і висотою $h>1$. Для $h>3$ знайдено точне значення екстремального радіуса Помпейю.

Введение. Пусть R^n – вещественное евклидово пространство размерности $n \ge 2$, $M(n)$ – группа движений в R^n, $Mot(A,B)=\{\lambda \in M(n): \lambda A \subset B\}$, $B_R=\{x \in R^n : |x|<R\}$. Компактное множество $A \subset R^n$ называется множеством Помпейю в B (будем обозначать это $Pomp(B)$), если всякая локально суммируемая функция $f: B \to C$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x)dx = 0, \ \forall \lambda \in Mot(A,B) \ , \qquad (1)$$

равна нулю почти всюду в B. Классическая проблема Помпейю об описании класса $Pomp(R^n)$ изучалась в [1; 2] с обширной библиографией. Из результата [3] следует, что если граница множества A липшицева, но не вещественно-аналитическая, то $A \in Pomp(R^n)$. В.В. Волчковым было доказано, что если некоторое множество $A \in Pomp(R^n)$, то $A \in Pomp(B_R)$ при достаточно большом R. В связи с этим в [4] поставлена следующая

Проблема. Для данного множества A найти

$$\Re(A) = \inf\{R>0 : A \in Pomp(B_R)\}$$

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\Re(A)$ получены в [5]. Отметим, что множества для которых были найдены точные значения или оценки величины $\Re(A)$, можно разбить на следующие типы по составу их границ:

1. Состоит из отрезков или плоских участков (многоугольники, многогранники) ([4, Part 4, Chapter 2,3], [5]).
2. Эллипсоиды ([4, Part 4, Chapter 4]).
3. Полушар ([4, Part 4, Chapter 5]).
4. Содержит дуги окружностей (секторы [7], треугольник Рело [8]).
5. Цилиндры в R^3, в основании которых лежат круговые сегменты ([9]).

То есть, это были или плоские множества или такие, которые можно получить из плоских путем обобщения на большую размерность.

В данной работе получены оценки снизу величины $\Re(A)$ для множества

$$A=\left\{(x,y,z) \in R^3 : 0 \le z \le h(1-\sqrt{x^2+y^2}), y \ge 0\right\} \qquad (2)$$

половины прямого кругового конуса с радиусом основания 1 и высотой $h>1$. Для случая $h>3$ получено точное значение величины $\Re(A)$.

Формулировка основного результат. Всюду в дальнейшем полагается, что $n=3$ и множество A имеет вид (2) Следуя [4, Part 4], введем следующие классы функций. Пусть $\Im(A,B)$ – множество функций из $L_{loc}(B)$, удовлетворяющих (1) Для $k=1,2,...,\infty$ положим $\Im^k(A,B)=\Im(A,B)\cap C^k(B)$.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть* $h>1$, *тогда* $\Re(A)\geq\dfrac{5h^2+1}{8h}$. *При* $h>3$ *имеет место равенство.* $\Re(\mathrm{A})=(5\mathrm{h}^2+1)/8\mathrm{h}$.

Геометрические конструкции. Для компактного множества K обозначим

$$r^*(K)=\inf\{R>0:\lambda K\subset B_R,\lambda\in M(n)\}$$

– наименьший из радиусов шаров, содержащий компактное множество K Тогда

$$r^*(A)=\begin{cases}(h^2+1)/(2h), h>1\\ 1, h\leq 1\end{cases}.$$

Пусть вершины полуконуса расположены в соответствии с рис.1а и $\overline{B}_R=\{x\in R^3:|x|\leq R\}$. Обозначим $Max_*(R,h)$ и $Min_*(R,h)$ –соответственно наибольшее и наименьшее расстояние от центра шара $\overline{B}_R$ до объекта * (вершины B, ребра AB или основания) полуконуса λA при всех возможных движениях $\lambda\in Mot(A,\overline{B}_R)$ Для определения этих величин заметим, что экстремальные расстояния достигаются при расположениях, треугольника ABC в наибольшем сечении шара, то есть в круге содержащем центр шара Поэтому далее будут рассматриваться положения треугольника ABC в круге радиуса R.

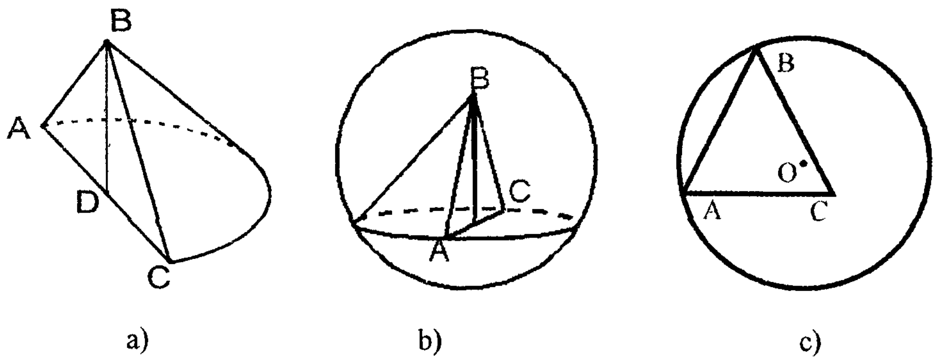

Рис.1

На рис.1b мы видим ближайшее расстояние от вершины B до центра шара. Двигая прямую AC в плоскости основания полуконуса или в плоскости ABC можно только увеличить расстояние от вершины B до центра шара Повороты не дают нового результата из-за симметричности шара. Остальные же движения полуконуса в шаре получаются путем совмещения указанных выше. То есть, рис. 1b действительно изображает $Min_B(R,h)$. Очевидно, этот рисунок показывает и $Max_{осн}(R,h)$

Рис. 1c изображает $Max_{AB}(R,h)$. Очевидно, что наибольшим расстоянием AB до центра шара будет случай, когда вершины A и B лежат на сфере радиуса

R В этом случае, для удобства вычислений расстояния, мы всегда можем расположить полуконус в наибольшем сечении шара.

Решив геометрические задачи по нахождению упомянутых расстояний для соответствующих экстремальных положений λA в $\overline{B}_R$, изображенных на рис.1 (b-c), приходим к следующим результатам

$$Max_{осн}(R,h) = h - R,\quad Min_{осн}(R,h) = h - R,\quad Max_B(R,h) = R,$$

$$Min_B(R,h) = h - \sqrt{R^2 - 1},\qquad Max_{AB}(R,h) = \sqrt{R^2 - \frac{h^2+1}{4}}.$$

Обозначим $\widetilde{r}(R,h)$ - наименьший радиус шарового слоя, в котором находятся основание и вершина B фигуры λA при всех $\lambda \in Mot(A, \overline{B}_R)$. Тогда

$$\widetilde{r}(R,h) = \min\{Min_{осн}(R,h), Min_B(R,h)\} = h - R.$$

Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $R > 0$, $\varepsilon \in (0,R)$ и $g \in C^\infty[0,R)$. Тогда существует функция $f \in C^\infty[0,R), f \neq 0$, такая что

$$\int_R^t \xi\sqrt{\xi^2 - t^2}\, f(\xi)d\xi = g(t), t \in (0, R-\varepsilon), \xi \in (R,t)$$

Доказательство. В указанном выше интеграле сделаем замену $\xi = \dfrac{1}{x}$, тогда

$$\int_{1/R}^{1/t} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2} - t^2}\, f\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = g(t),\qquad \int_{1/R}^{1/t} \frac{1}{x^4}\sqrt{\frac{1}{t^2} - x^2}\, f\left(\frac{1}{x}\right)dx = -g(t)/t$$

Заменим $\dfrac{1}{x^4} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = h(x)$, $y = \dfrac{1}{t}$ и $G(y) = -\dfrac{g(t)}{t}$ (отметим, что $G(y) \in C^\infty$)

Тогда исходный интеграл преобразуется следующим образом:

$\displaystyle\int_{1/R}^{y} h(x)\sqrt{y^2 - x^2}dx = G(y)$ После замен $y^2 = z$, $x^2 = \tau$ и $\dfrac{h(x)}{x} = H(\tau)$, имеем

$$\int_{1/R^2}^{z} \sqrt{z-\tau}\cdot H(\tau)d\tau = 2G(\sqrt{z}) = F(z).$$

Дифференцируя интеграл по z, получаем $\displaystyle\int_{1/R^2}^{z} \frac{H(\tau)}{\sqrt{z-\tau}}d\tau = 2F_z'(z) = \Lambda(z)$.

Отсюда имеем

$$H(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\Lambda\left(\frac{1}{R^2}\right)}{\sqrt{z - \frac{1}{R^2}}} + \int_{1/R}^{z} \frac{\Lambda_\tau'(\tau)d\tau}{\sqrt{z-\tau}}\right].$$

Возвращаясь к выполненным заменам, получаем

$$H(z)=\frac{h(y)}{y}=\frac{\frac{1}{y^4}\cdot f\left(\frac{1}{y}\right)}{y}=\frac{t^4 f(t)}{1/t}=t^5 f(t)$$

То есть

$$f(t)=\frac{1}{\pi\cdot t^5}\left[\frac{\Lambda\left(\frac{1}{R^2}\right)}{\sqrt{z-\frac{1}{R^2}}}+\int_{1/R}^{z}\frac{\Lambda_\tau'(\tau)d\tau}{\sqrt{z-\tau}}\right].$$

Учитывая, что в заменах мы использовали функции из $C^\infty[0,R)$, делаем вывод, что полученное решение $f(t)\in C^\infty[0,R)$.

Лемма 2. Пусть $R>0$, $\varepsilon\in(0,R)$. Тогда существует функция $f\in C^\infty[0,R), f\neq 0$,такая что

$$\int_{-\sqrt{R^2-t^2}}^{\sqrt{R^2-t^2}} f(\sqrt{t^2+y^2})(y+s)^2 dy=0, \forall x,y: x^2+y^2<R, \forall s\in R^1, t\in(-R+\varepsilon,R-\varepsilon)$$

Доказательство.

$$\int_{-\sqrt{R^2-t^2}}^{\sqrt{R^2-t^2}} f(\sqrt{t^2+y^2})(y+s)^2 dy=$$

$$=\int_{-\sqrt{R^2-t^2}}^{0} f(\sqrt{t^2+y^2})(y+s)^2 dy+\int_{0}^{\sqrt{R^2-t^2}} f(\sqrt{t^2+y^2})(y+s)^2 dy$$

Сделаем замену $\xi=\sqrt{t^2+y^2}$, тогда предыдущее равенство можно продолжить следующим образом:

$$-\int_R^t f(\xi)(s+\sqrt{\xi^2-t^2})^2\cdot\frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2-t^2}}+\int_t^R f(\xi)(s+\sqrt{\xi^2-t^2})^2\cdot\frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2-t^2}}=$$

$$=\int_t^R f(\xi)(s^2+\xi^2-t^2)\cdot\frac{2\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2-t^2}}=\int_t^R f(\xi)\cdot\frac{2\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2-t^2}}+\int_t^R 2\xi f(\xi)\sqrt{\xi^2-t^2}d\xi$$

Подберем функцию $g(t)$ из леммы 1 , так чтобы $g(t)=0$ при $t\in[0,R-\varepsilon)$ и $g(t)\neq 0$ при $t\in(R-\varepsilon,R)$. Таким образом, два последних интеграла равны нулю Следовательно, утверждение леммы доказано.Утверждение леммы 2 переносится и на трехмерный случай. Пусть $t\in[0,R-\varepsilon)$ и L_t - прямая, параллельная одной оси Oz. Тогда верна следующая

Лемма 3. Пусть $R>0$, $\varepsilon\in(0,R)$. Тогда существует функция $f\in C^\infty[0,R), f\neq 0$, такая что

$$\int_{L_t} f(x^2+y^2)(y+s)^2 dy=0, \forall x,y . x^2+y^2<R, \forall s\in R^1, t\in(-R+\varepsilon,R-\varepsilon)$$

Доказательство этой леммы очевидно сводится к доказательству леммы 2, если провести через прямую L_t и центр системы координат плоскость.

Следующая лемма будет необходима для построения нетривиальной функции из класса $\Im(\lambda A, B)$ для некоторых λ и R

Лемма 4. Пусть $0 < \widetilde{r} < R$, функция $f \in C^{\infty}(R^n)$. $f \neq 0$ в $B_{\widetilde{r},\infty}$, радиальная и имеет нулевые интегралы по всем прямым, расстояние d от которых до центра шара $B_R, d < \widetilde{r}$. Тогда для любого полуконуса $\lambda A \subset B_R$, где $\lambda \in Mot(A, \overline{B}_R)$, вершина B и основание которого лежат в шаровом слое $B_{\widetilde{r},R}$, а прямолинейные отрезки имеют непустое пересечение с шаром $B_{\widetilde{r}}$ интеграл $\int\limits_{\lambda A} f(x)dx = 0$ для любых $\lambda \in Mot(A, B_R)$

Доказательство. Доопределим функцию f нулем во внешности шара B_R Тогда интеграл от функции f по данному полуконусу λA не изменится, если вместо него рассмотреть бесконечный полуконус $\lambda\widetilde{A}$, который получается из данного путем продления образующих

$$\int\limits_{\lambda\widetilde{A}} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\lambda\widetilde{A} \cap B_{\widetilde{r}}} f(x,y,z)dxdydz + \int\limits_{\lambda\widetilde{A} \setminus B_{\widetilde{r}}} f(x,y,z)dxdydz$$

Рассмотрим случай, когда вершина B является началом координат При интегрировании перейдем к сферической системе координат

$$\int\limits_{\lambda\widetilde{A}} f(x,y,z)dxdydz = \begin{bmatrix} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{bmatrix} = \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{0}^{\infty} \rho^2 f(\rho,\theta,\varphi)d\rho\right)\sin\theta d\theta d\varphi,$$

где $\Omega = \{\theta, \varphi\}$ По лемме 3 внутренний интеграл последнего равенства равен нулю. Мы рассмотрели случай, когда вершина B нашей фигуры является центром начала координат. Рассматривать поворот не имеет смысла в силу симметричности шара. Все остальные положения полуконуса являются результатом сдвига Таким образом, теорема доказана.

Доказательство основного результата. Покажем сначала, что при $R < \dfrac{5h^2+1}{8h}$ фигура λA удовлетворят условию леммы 4. Максимальное расстояние образующих полуконуса до центра шара B_R не должно превышать $\widetilde{r}$, а его основание и вершина B должны находиться в шаровом слое $B_{\widetilde{r},R}$. Эти условия обеспечивает система уравнений

$$\begin{cases} Max_{AB}(h,R) < \widetilde{r} \\ \widetilde{r} > 0 \end{cases}$$

или, что то же самое

$$\begin{cases} \sqrt{R^2 + \dfrac{h^2+1}{4}} < h - R \\ h - R > 0 \end{cases}$$

Решив данную систему, получаем

$$R < \frac{5h^2+1}{8h} \text{ при } h \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$$

Так как фигура λA ($\lambda \in Mot(A, \overline{B}_R)$) удовлетворяет условиям леммы 4 при $h > 1$, то для функции $f \in C^\infty(R^n)$, также удовлетворяющей условиям леммы 4, верно следующее

$$\int_{\lambda A} f(x)dx = 0 \text{ для любых } \lambda \in Mot(A, B_R)$$

Таким образом, при $R < \dfrac{5h^2+1}{8h}$ данная функция является примером ненулевой функции из класса $\mathfrak{J}^\infty(A, B)$

Итак, имеем оценку снизу для $\mathfrak{R}(A) \geq \dfrac{5h^2+1}{8h}$ при $h > 1$ В [10] получена оценка сверху величины $\mathfrak{R}(A)$ для $h > 0$ Учитывая, что при $h > 3$ нижняя и верхняя оценки совпадают, найдено точное значение $\mathfrak{R}(A) = \dfrac{5h^2+1}{8h}$ для фигуры λA ($\lambda \in Mot(A, B_R)$)

Применения полученного результата. Теорема 1 позволяет получить достаточное условие замкнутости в пространстве $L_p(B_R)$ ($1 \leq p < \infty$) системы функций

$$\{\chi_A(\lambda^{-1}x) \quad \lambda \in Mot(A, B_R)\} \qquad (3)$$

Здесь χ_A – характеристическая функция множества A, то есть

$$\chi_A = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

Теорема 2 *Пусть* $h > 3$, $R > r^*(A)$ *и* $1 \leq p < \infty$ *Тогда система функций (3) замкнута в* $L_p(B_R)$ *при* $R \geq \dfrac{5h^2+1}{8h}$ *и незамкнута при* $R < \dfrac{5h^2+1}{8h}$

Доказательство. Пусть существует функция $f \in L_p(B_R)$, где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, которая ортогональна системе функций (3) То есть для любого $\lambda \in Mot(A, B_R)$ верно равенство

$$\int_{B_R} f(x)\chi_{\lambda A}dx = 0$$

Учитывая определение индикатора множества, последнее утверждение можно переписать в виде $\int_{\lambda A} f(x)dx = 0$ для любого $\lambda \in Mot(A, B_R)$, что означает $f \in \Im(A, B)$. Учитывая, что $R \geq \frac{5h^2+1}{8h}$, по теореме 1 получаем $f \equiv 0$. Отсюда следует замкнутость системы (3) при $R \geq \frac{5h^2+1}{8h}$. При $R < \frac{5h^2+1}{8h}$ из доказательства теоремы 1 следует. что существует функция $f \in C^\infty[0, R), f \neq 0$ такая что $\int_{\lambda A} f(x)dx = 0$ для любого $\lambda \in Mot(A, B_R)$

Следовательно, для такой ненулевой функции выполняется равенство $\int_{B_R} f(x)\chi_{\lambda A} dx = 0$, то есть она ортогональна системе функций (3). Таким образом получаем, что система функций (3) незамкнута при $R < \frac{5h^2+1}{8h}$.

Библиографические ссылки

1. **Zalcman L.** A bibliographic survey of Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations/ed. B. Fuglede et al., –1992. – P. 185 –194
2. **Zalcman L.** Supplementary bibliography to 'A bibliographic survey of Pompeiu problem' in Radon Transforms and Tomography' //Comtemp. Math – 2001. –Vol. 278 – P. 69 – 74.
3. **Williams S. A.** A partial solution of the Pompeiu problem // Math. Ann. – 1976. –Vol. 223. – P. 183-190.
4. **Volchkov V.V.** Integral Geometry and Convolution Equastion // Kluwer Academic Publishers. DordRecht/Boston/London – 2003. – 454 p.
5. **Berenstein C. A., Gay R.** Le problem de Pompeiu locate // J. Anal. Math. –1989. – Vol.52. – P. 133 – 166.
6. **Волчков В. В.** О функциях с нулевыми интегралами по кубам/В.В. Волчков// Укр. мат. ж. – 1991. – Т. 43, № 6 . – С. 859 – 863.
7. **Машаров П. А.** Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю/П.А. Машаров// Доповіді НАН України. – 2001. – № 7. – С. 25–29.
8. **Машаров П. А.** Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело /П.А. Машаров// Вестник Дніпропетр. ун-ту. Математика, Вип. 6. –2001. – С. 72 – 81.
9. **Машаров П. А.** Про циліндри з локальною властивістю Помпейю/П.А. Машаров // Вістник Донецького національного ун-ту. Серія А. Природничі науки.– 2000, № 1. – С. 21-25.
10. **Елец Л. В.** Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю /Л.В. Елец, П А. Машаров // Укр. мат. журн. – 2009. Т. 61 – С. 61–72

Надійшла до редколегії 26 02 09

УДК 517.5

В. А. Кофанов

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСИ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕЙЛЯ

Отримано нерівність, яка оцінює півнорму Вейля похідних функцій, що задані на осі, через рівномірні норми цих функцій та їх старших похідних і розв'язано відповідну задачу Колмогорова.

Пусть G обозначает отрезок, действительную ось R, или единичную окружность T, реализованную в виде отрезка $[0,2\pi]$ с отождествленными концами. Символом $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, будем обозначать пространства измеримых функций $x : G \to R$, таких что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если } 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \in G} |x(t)|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in N$ и $p, s \in [1, \infty]$ через $L^r_{p,s}$ обозначим пространство функций $x : R \to R$, для которых $x^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, $x \in L_p(R)$ и $x^{(r)} \in L_s(R)$. Будем писать $\|x\|_p$ вместо $\|x\|_{L_p(R)}$ и L^r_∞ вместо $L^r_{\infty,\infty}$.

В данной статье изучается модификация задачи Колмогорова

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \to \sup, \; k = 1, \dots, r-1, \; q \ge 1, \qquad (1)$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $x \in L^r_{p,s}$, таким что

$$\|x\|_p \le A_0, \qquad \left\|x^{(r)}\right\|_s \le A_r. \qquad (2)$$

Хорошо известно [1], что эта задача эквивалентна нахождению точной константы в неравенстве

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le C \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha}, \quad k, r \in N, \; k < r, \qquad (3)$$

для функций $x \in L^r_{p,s}$, где $\alpha = (r - k + 1/q - 1/s)/(r + 1/p - 1/s)$. Имеется лишь несколько случаев решения этой задачи для всех $r \in N$. Полную библиографию по этому предмету можно найти в [1–3].

Для произвольного отрезка $[a, b] \subset R$ авторы работы [4] нашли решение следующей модифицированной задачи Колмогорова

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]} \to \sup, \; k = 1, \dots, r-1, \; q \ge 1, \qquad (4)$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющим условию (2) с $p = q = \infty$

Хорошо известно [5], что для функций x, таких что $x \in L_q[a,b]$ для любых $a, b \in R$, существует предел

$$\lim_{\Delta\to\infty} \sup_{a\in R} \left(\frac{1}{\Delta} \int_a^{a+\Delta} |x(t)|^q dt \right)^{1/q} =: \|x\|_{W_q}. \tag{5}$$

Заметим, что для T-периодической функции x

$$\|x\|_{W_q} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

Функционал $\|x\|_{W_q}$ используется при определении почти периодических функций в смысле Вейля [5]. Положим

$$\Phi_q^{r,k}(\gamma,\delta) = \sup \left\|x^{(k)}\right\|_{W_q}, \tag{6}$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $x \in L^r_\infty$, таким что

$$\|x\|_\infty \le \gamma, \quad \left\|x^{(r)}\right\|_\infty \le \delta.$$

В настоящей работе доказано, что для $k = 1,\dots,r-1$, $q \ge 1$

$$\Phi_q^{r,k}(\gamma,\delta) = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{W_q}}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \gamma^{1-k/r} \delta^{k/r}, \quad \gamma,\ \delta > 0,$$

где φ_r – идеальный сплайн Эйлера порядка r, а $\dfrac{\|\varphi_{r-k}\|_{W_q}}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}}$ – точная константа в неравенстве

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{W_q} \le C \|x\|_\infty^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \quad \alpha = (r-k)/r$$

Кроме того, решена задача Колмогорова о необходимом и достаточном условии существования функции $x \in L^r_\infty$, для которой

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{W_q} = \omega, \quad \|x\|_\infty = \gamma, \quad \left\|x^{(r)}\right\|_\infty = \delta,$$

где ω, γ, δ – произвольно заданные положительные числа.

Нам потребуется функция $\varphi_{[a,b],1,k}$, построенная в [4], которая является экстремалью в задаче (4). Пусть φ_r – r-й 2π-периодический интеграл со средним значением на периоде равным нулю от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) =: \lambda^{-1} \varphi_r(\lambda t)$. Фиксируем произвольный отрезок $[a, b] \subset R$, $r \in N$ и A_r, $A_0 > 0$. Выберем $\lambda > 0$, удовлетворяющее условию

$$A_0 = A_r \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty \tag{7}$$

и представим длину Δ отрезка $[a, b]$ в виде

$$\Delta = n\frac{\pi}{\lambda} + 2\Theta, \quad n \in N, \quad \Theta \in (0, \pi/(2\lambda)). \tag{8}$$

Тогда

$$\varphi_{[a,b],\, r\, k}(t) := A_r\, \varphi_{\lambda, r}(t + \tau_k), \qquad \tau_k := \frac{\pi}{4\lambda}\left(1 + (-1)^{k+1}\right),$$

где τ_k выбрано так, что

$$\left|\varphi^{(k)}_{[a,b],\, r,\, k}(a + \Theta)\right| = \left|\varphi^{(k)}_{[a,b],\, r,\, k}(b - \Theta)\right| = A_r \left\|\varphi_{\lambda, r-k}\right\|_\infty .$$

Ясно, что $\varphi_{[a,b],\, r,\, k} \in L^r_\infty$ и

$$\left\|\varphi_{[a,b],\, r,\, k}\right\|_\infty = A_0, \quad \left\|\varphi^{(r)}_{[a,b],\, r,\, k}\right\|_\infty = A_r .$$

Рассмотрим класс функций

$$L^r_\infty(A_0, A_r) := \left\{ x \in L^r_\infty : \|x\|_\infty = A_0, \left\|x^{(r)}\right\|_\infty = A_r \right\}$$

и пусть

$$R(\Delta) := \sup_{x \in L^r_\infty(A_0, A_r)} \frac{\sup\limits_{a \in R}\left(\frac{1}{\Delta}\int\limits_a^{a+\Delta}\left|x^{(k)}(t)\right|^q dt\right)^{1/q}}{\|x\|_\infty^{1-k/r}\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}}, \quad \Delta > 0.$$

Согласно результату работы [4] для $k = 1, \ldots, r-1$, $q \geq 1$

$$R(\Delta) = \frac{\left(\frac{1}{\Delta}\int\limits_a^{a+\Delta}\left|\varphi^{(k)}_{[a, a+\Delta],\, r,\, k}(t)\right|^q dt\right)^{1/q}}{A_0^{1-k/r}\, A_r^{k/r}}$$

Найдем двухсторонние оценки для величины $R(\Delta)$. Пусть m – точка локального максимума сплайна φ_{r-k}. Тогда

$$\int\limits_a^{a+\Delta}\left|\varphi^{(k)}_{[a, a+\Delta],\, r,\, k}(t)\right|^q dt = n A_r^q \int\limits_{m/\lambda}^{m/\lambda + \pi/\lambda}\left|\varphi_{\lambda, r-k}(t)\right|^q dt + 2 A_r^q \int\limits_{m/\lambda}^{m/\lambda + \Theta}\left|\varphi_{\lambda, r-k}(t)\right|^q dt,$$

где λ определяется условием (7), а n и Θ – условием (8). Следовательно, ввиду определения $\varphi_{\lambda, r-k}$

$$R(\Delta) = \frac{A_r \lambda^{-(r-k+1/q)}\left(n\int\limits_m^{m+\pi}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^q dt + 2\int\limits_m^{m+\Theta\lambda}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^q dt\right)^{1/q}}{\Delta^{1/q}\left(A_r\, \lambda^{-r}\left\|\varphi_r\right\|_\infty\right)^{1-k/r} A_r^{k/r}}.$$

Таким образом,

$$R(\Delta) = \frac{1}{(\Delta\lambda)^{1/q}} \frac{\left(n\int\limits_m^{m+\pi}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^q dt + 2\int\limits_m^{m+\Theta\lambda}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^q dt\right)^{1/q}}{\left\|\varphi_r\right\|_\infty^{1-k/r}}.$$

Ясно, что

$$0\le 2\int\limits_{m}^{m+\Theta\lambda}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\le\int\limits_{m}^{m+\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt,$$

так как $\Theta\in(0,\pi/(2\lambda))$. Поэтому

$$\left(\frac{n}{\Delta\lambda}\right)^{1/q}\frac{\left(\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}}\le R(\Delta)\le\left(\frac{n+1}{\Delta\lambda}\right)^{1/q}\frac{\left(\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}}.$$

Согласно (8) и (7)

$$\frac{n\pi}{\Delta\lambda}=\frac{n\pi}{n\pi+2\lambda\Theta}\ge\frac{n}{n+1},\qquad\frac{(n+1)\pi}{\Delta\lambda}=\frac{(n+1)\pi}{n\pi+2\lambda\Theta}\le\frac{n+1}{n}$$

и

$$n=\left[\frac{\lambda\Delta}{\pi}\right]=\left[\frac{\Delta}{\pi}\left(\frac{A_r\|\varphi_r\|_\infty}{A_0}\right)^{1/r}\right].\tag{9}$$

где $[a]$ – целая часть числа a. Таким образом,

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/q}\frac{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}}\le R(\Delta)\le\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/q}\frac{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}}.\tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть* $k, r\in N$, $k<r$, $q\ge 1$. *Для любой функции* $x\in L_\infty^r$

$$\|x^{(k)}\|_{W_q}\le\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q}\left(\frac{\|x\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{r-k}{r}}\|x^{(r)}\|_\infty^{\frac{k}{r}},\tag{11}$$

где $\|\cdot\|_{W_q}$ *определена соотношением (5). Неравенство (11) является точным и обращается в равенство для функций* $x(t)=a\,\varphi_{\lambda,r}(t+b)$, $a, b\in R$, $\lambda>0$

Доказательство. Фиксируем произвольную функцию $x\in L_\infty^r$, $x\ne\mathrm{const}$. Тогда $x\in L_\infty^r(A_0, A_r)$, где $A_0=\|x\|_\infty$, $A_r=\|x^{(r)}\|_\infty$. По неравенству (10)

$$\frac{\sup\limits_{a\in R}\left(\frac{1}{\Delta}\int\limits_a^{a+\Delta}|x^{(k)}(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\|x\|_\infty^{1-k/r}\ \|x^{(r)}\|_\infty^{k/r}}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/q}\frac{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}},\tag{12}$$

где n определено равенством (9). Из (9) следует, что $n\to\infty$ при $\Delta\to\infty$. Поэтому, переходя в (12) к пределу при $\Delta\to\infty$, получаем (11). Точность (11) очевидна.

Замечание. Для периодических функций неравенство (11) трансформируется в хорошо известное неравенство А.А. Лигуна [6].

Следствие 1. Пусть $k, r\in N$, $k<r$, $q\ge 1$. Тогда

$$\Phi_q^{r,k}(\gamma,\delta) = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{W_q}}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \gamma^{1-k/r}\delta^{k/r}, \ \gamma,\ \delta > 0, \qquad (13)$$

где $\Phi_q^{r,k}(\gamma,\delta)$ определено равенством (6).

Доказательство. Ясно, что величина $\Phi_q^{r,k}(\gamma,\delta)$ меньше или равна правой части равенства (13). С другой стороны, для любых фиксированных $\gamma,\ \delta > 0$ рассмотрим функцию $x_0(t) := \delta\varphi_{\lambda,r}(t)$, где λ выбрано так, что $\|x_0\|_\infty = \gamma$, т. е. $\lambda = \left(\gamma^{-1}\delta\|\varphi_r\|_\infty\right)^{1/r}$. Тогда $\left\|x_0^{(r)}\right\|_\infty = \delta$ и

$$\Phi_q^{r,k}(\gamma,\delta) \ge \left\|x_0^{(k)}\right\|_{W_q} = \delta\left(\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{\pi/\lambda}|\varphi_{\lambda,\,r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q} = \delta\lambda^{-(r-k)}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q} =$$

$$= \delta\left(\frac{\gamma}{\delta\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{(r-k)/r}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q} = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{W_q}}{\|\varphi_r\|_\infty^{(r-k)/r}}\gamma^{(r-k)/r}\delta^{k/r}.$$

Повторяя рассуждения Колмогорова [7] (см. также доказательство теоремы 2.4.1 из [1]), получаем еще одно следствие.

Следствие 2. Пусть k, $r \in N$, $k < r$, $q \ge 1$. Для положительных ϖ, γ, δ существует функция $x_0 \in L_\infty^r$, такая что

$$\left\|x_0^{(k)}\right\|_{W_q} = \varpi, \qquad \|x_0\|_\infty = \gamma, \qquad \left\|x_0^{(r)}\right\|_\infty = \delta$$

если и только если

$$\varpi \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{W_q}}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}}\gamma^{1-k/r}\delta^{k/r}.$$

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов//.– К., 2003.–592 с.
2. **Бабенко В.Ф.** Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям / В.Ф. Бабенко //Укр. мат. журн. – 2000.– 52, № 1, С. 5 – 29.
3. **Kwong M.K., Zettl A.** Norm Inequalities for Derivatives and Differeces. Lecture Notes in Math. 1536.– Berlin., 1992.
4. **Bojanov B., Naidenov N.** An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos // Journal d'Analyse Mathematique.– 1999.–78.– C.263 – 280.
5. **Левитан Б.М.** Почти-периодические функции / Б.М. Левитан //– М.,1953. – 396 с.
6. **Ligun A.A.** Inequalities for upper bounds of functionals. // Analysis Math.– 1976.–2, №1.– C.11 – 40.
7. **Колмогоров А. Н.** Избранные труды. Математика, механика / А. Н. Колмогоров //– М., 1985, – С 252 – 263.

Надійшла до редколегії 10.01.09

УДК 517.5

Т.В. Ломако, Р.Р. Салимов

Институт прикладной математики и механики НАН Украины

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА ПЛОЩАДИ

Досліжується узагальнення задачі М.О. Лаврентьєва про оцінку площі зображення круга. Показано, що одержана оцінка у досліджуємому класі є точною.

Введение. Задача об оценке площади образа круга при квазиконформных отображениях впервые исследовалось в [1].

Приведем основные обозначения и определения, которые будут использованы нами в дальнейшем. Всюду далее D – область в комплексной плоскости C, т. е. связное открытое подмножество C, $z = x + iy$ – произвольная точка комплексной плоскости C, $S(z_0, r) = \{z \in C : |z - z_0| = r\}$, $S(r) = \{z \in C : |z| = r\}$, $A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in C : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, $B(r) = \{z \in C : |z| < r\}$, $B = \{z \in C : |z| < 1\}$, $\operatorname{dist}(E, F)$ обозначает евклидово расстояние между множествами E и F в C. Пусть $E, F \subseteq \overline{C}$ – произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E, F, D)$ – семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{C}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$.

Ввиду того, что емкости и модули являются основным геометрическим методом в современной теории отображений, следующая концепция была предложена в [2– 4]. Пусть G – область в C и пусть $Q : G \to [1, \infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f : G \to \overline{C} = C \cup \{\infty\}$ называется Q-гомеоморфизмом, если

$$M(f\,\Gamma) \leq \int\limits_G Q(z) \cdot \rho^2(z)\,dxdy \qquad (1)$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ρ для Γ. Эта концепция является естественным обобщением геометрического определения квазиконформного отображения [5].

Напомним, что борелева функция $\rho : \overline{C} \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\overline{C}$, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_\gamma \rho(z)|dz| \geq 1 \qquad (2)$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* семейства кривых Γ в D определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^2(z)\,dxdy. \qquad (3)$$

Следующее понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу [6]. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{C}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $z_0 \in D$, если соотношение

$$M(f(\Delta(S_1, S_2, A))) \le \int_A Q(z)\eta^2(|z - z_0|)dxdy \qquad (4)$$

выполнено для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, где $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, окружностей $S_i = S(z_0, r_i)$, $i = 1, 2$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr = 1. \qquad (5)$$

Следуя [7], пару $E = (A, K)$ называем *конденсатором*, где $A \subset C$ – открытое множество и K – непустое компактное множество содержащееся в A; E называем *кольцевым конденсатором*, если $G = A \setminus K$ – кольцо, т.е., если G – область, дополнение которой $\overline{C} \setminus G$ состоит в точности из двух компонент; E называем *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят, что конденсатор $E = (A, K)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to C$ – открытое отображение и $E = (A, K)$ – конденсатор в D, то (fA, fK) также конденсатор в fD. Далее $fE = (fA, fK)$.

Пусть $E = (A, K)$ – конденсатор. $W_0(E) = W_0(A, K)$ – семейство неотрицательных функций $u : A \to R$ таких, что:

1) $u \in C_0(A)$, где C_0 – класс непрерывных функций, финитных в A;
2) $u(x) \ge 1$ для $x \in K$;
3) u принадлежит классу ACL и

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (6)$$

Величина

$$cap\ E = cap\ (A, K) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^2 dxdy$$

называется *ёмкостью* конденсатора E. Известно [7], что

$$cap\, E \ge \frac{(\inf l(S))^2}{m(A \setminus K)}, \qquad (7)$$

где $l(S)$ – одномерная мера Лебега кривой S, которая является границей $S = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего K и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A, а точная нижняя грань берется по всем таким S. Кроме того [8],

$$cap\ E = M(\Delta(\partial A, \partial K; A \setminus K)). \qquad (8)$$

Лемма 1. Для любого конденсатора $E=(A,\,K)$,

$$cap\ E \geq \frac{4\pi\, m(K)}{m(A\setminus K)}. \tag{9}$$

Доказательство. Из (7) следует, что

$$\inf l(S) \leq [m(A\setminus K)]^{\frac{1}{2}}\,(cap\ E)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Применяя изопериметрическое неравенство получаем утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть f – кольцевой Q-гомеоморфизм B в B в точке 0. Тогда имеет место неравенство

$$m(fB(t)) \leq \pi \exp\left\{-4\pi\int\limits_r^1 \frac{dt}{t\int\limits_0^{2\pi} Q(te^{i\varphi})d\varphi}\right\} \quad \forall\ r\in[0,\,1]. \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим в точке 0 сферическое кольцо $R_t=\{z\in C: t<|z|<t+\Delta t\}\subset B$, где $t\geq 0$ – некоторое фиксированное число Пусть

$$K_t=B(t),\ A_{t+\Delta t}=B(t+\Delta t)$$

$\left(A_{t+\Delta t},\overline{K_t}\right)$ конденсатор, тогда $\left(fA_{t+\Delta t},f\overline{K_t}\right)$ – кольцевой конденсатор в B, согласно [8; 9; 10],

$$cap\left(fA_{t+\Delta t},f\overline{K_t}\right)=M\left(\Delta\left(\partial fA_{t+\Delta t},\partial fK_t;\ fR_t\right)\right)$$

и, ввиду гомеоморфности f,

$$\Delta\left(\partial fA_{t+\Delta t},\partial fK_t;\ fR_t\right)=f\left(\Delta\left(\partial A_{t+\Delta t},\partial K_t;\ R_t\right)\right).$$

Пусть $\Phi(t)=m(fB(t))$. В силу (9) получаем

$$cap\left(fA_{t+\Delta t},f\overline{K_t}\right)\geq\frac{4\pi\, m(fK_t)}{m(fA_{t+\Delta t}\setminus fK_t)}$$

и, следовательно,

$$4\pi\,\Phi(t)\leq\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}\cdot\Delta t\int\limits_{R_t}Q(z)\cdot\eta^2(|z|)dxdy$$

для любой измеримой функции $\eta:(t,\,t+\Delta t)\to[0,\,\infty]$ такой, что $\int\limits_t^{t+\Delta t}\eta(r)dr=1$.

Возьмем функцию $\eta_0(r)=\dfrac{1}{r\ln\left(\dfrac{t+\Delta t}{t}\right)}$. Поскольку $\int\limits_t^{t+\Delta t}\eta_0(r)dr=1$, то

$$4\pi\,\Phi(t)\le\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}\cdot\Delta t\int\limits_{R_t}\frac{Q(z)}{|z|^2\left(\ln\left(\frac{t+\Delta t}{t}\right)\right)^2}dxdy\,.$$

Переходя в последнем неравенстве к полярным координатам $z=(x,\ y)\to(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$, имеем неравенство

$$4\pi\,\Phi(t)\le\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}\cdot\frac{t^2\cdot\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\left(\int\limits_0^{2\pi}Q(\rho e^{i\varphi})d\varphi\right)\frac{d\rho}{\rho}}{\left\{\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta t}{t}\right)}{\frac{\Delta t}{t}}\right\}^2},$$

и при $\Delta t\to 0$ получаем для п в. t

$$4\pi\,\Phi(t)\le\Phi'(t)\cdot t\int\limits_0^{2\pi}Q(te^{i\varphi})d\varphi,$$

т. е.

$$\frac{4\pi}{t\int\limits_0^{2\pi}Q(te^{i\varphi})d\varphi}\le\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}.$$

Интегрируя последнее неравенство по $t\in(r,\,1)$, имеем

$$4\pi\int\limits_r^1\frac{dt}{t\int\limits_0^{2\pi}Q(te^{i\varphi})d\varphi}\le\ln\Phi(t)\Big|_r^1=\ln\frac{\pi}{\Phi(r)},$$

т. е

$$\Phi(r)\le\pi\exp\left\{-4\pi\int\limits_r^1\frac{dt}{t\int\limits_0^{2\pi}Q(te^{i\varphi})d\varphi}\right\},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{R}_Q$ *-- класс всех кольцевых* Q*-гомеоморфизмов* B *в* B *в точке 0 таких, что*

$$\int\limits_0^1\frac{dt}{t\int\limits_0^{2\pi}Q(te^{i\varphi})d\varphi}=\infty\,. \qquad (12)$$

Тогда

$$\sup_{f\in\Re_Q}\Phi_f(r)=\pi\exp\left\{-4\pi\int_r^1\frac{dt}{t\int_0^{2\pi}Q(te^{i\varphi})d\varphi}\right\},\qquad (13)$$

где $\Phi_f(r)=m(fB(r))$, $r\in(0,1)$. *Ср. [11], с 41.*

Доказательство. Согласно лемме 2

$$\Phi_f(r)\le\pi\exp\left\{-4\pi\int_r^1\frac{dt}{t\int_0^{2\pi}Q(te^{i\varphi})d\varphi}\right\}\qquad (14)$$

Покажем, что равенство в (14) достигается на отображении

$$f_0(z)=\exp\left\{-2\pi\int_{|z|}^1\frac{dt}{t\int_0^{2\pi}Q(te^{i\varphi})d\varphi}\right\}\exp\{i\arg z\}.$$

Для этого воспользуемся теоремой 2.1. из [12], согласно которой гомеоморфизм f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке 0 тогда и только тогда, когда для любых $0<r_1<r_2<1$ имеет место неравенство

$$M(f(\Delta(S_1,S_2,A)))\le\frac{1}{\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t\int_0^{2\pi}Q(te^{i\varphi})d\varphi}},$$

где $S_j=S(r_j)$, $j=1,2$, $A=A(0,r_1,r_2)$.

Обозначим $k(r_j)=-2\pi\int_{r_j}^1\frac{dt}{t\int_0^{2\pi}Q(te^{i\varphi})d\varphi}$, где r_j соответствует некоторой точке $z_j=r_je^{i\varphi_j}\in B$, тогда $f_0(z_j)=e^{k(r_j)}e^{i\arg\varphi_j}$, $j=1,2$. Согласно [9], получаем

$$M\left(\Delta\left(S\left(e^{k(r_1)}\right),S\left(e^{k(r_2)}\right),A\left(0,e^{k(r_1)},e^{k(r_2)}\right)\right)\right)=\frac{2\pi}{\ln\frac{e^{k(r_2)}}{e^{k(r_1)}}}=\frac{1}{\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t\int_0^{2\pi}Q(te^{i\varphi})d\varphi}}.$$

Отображение f_0 отображает круг $B(r)$ на круг $B(\varphi(r))$, где $\varphi(r)=e^{k(r)}$, площадь которого равна $\pi e^{2k(r)}$, т. е. равенство в (14) достигается на $f_0\in\Re_Q$.

Следствие 1. Если в теореме 1 $Q \equiv Q_0 = const$, то имеет место равенство

$$\sup_{f \in \Re_Q} \Phi_f'(r) = \pi r^{\frac{2}{Q_0}}.$$

Ср. [1, с. 80].

Следствие 2. Если в теореме 1 $Q(z) = \ln \frac{e}{|z|}$, $z \in B$, то имеет место равенство

$$\sup_{f \in \Re_Q} \Phi_f(r) = \pi \ln^{-2}\left(\frac{e}{r}\right).$$

Библиографические ссылки

1. **Лаврентьев М. А.** Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений т эллиптического типа./ М. А. Лаврентьев – М. 1962. –136 с.
2. **Martio O.** ., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Mappings with finite length distortion// J. d'Anal. –Math. 93 (2004), – P. 215 –236.
3. **Martio O.**, Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. 30 (2005), – P. 49 – 69.
4. **Martio O.**, Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Q-homeomorphisms // Contemporary Math. 364 (2006), – P. 193 – 203.
5. **Vaisala J.** Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math. 229, Springer-Verlag, Berlin (1971).
6. **Ryazanov V.**, Srebro U., Yakubov E. On ring solutions of Beltrami equations // J. d'Anal. Math. 96 (2005), – P. 117–150.
7. **Martio O.**, Rickman S., Vaisala J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. 448 (1969), 40 p.
8. **Hesse J.** A p-extremal length and p-capacity equality//Ark. Mat. 13 (1975),– P.131-144.
9. **Gehring F.** Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications. Vol. 2, International Atomic Energy Agency, Vienna (1976).
10. **Shlyk V.A.**On the equality between p-capacity and p-modulus // Sibirsk. Mat. Zh. 34, № 6 (1993), 216-221; transl. in Siberian Math. J. 34, №. 6 (1993), – P. 1196 –1200.
11. **Bojarski B.**, Gutlyanskii V., Martio O. and Ryazanov V. Infinitesimal geometry of quasiconformal maps. Springer (to appear).
12. **Рязанов В.** Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов/ В. Рязанов, Е. Севостьянов//Сибирский матем. журн.,48 (2007), № 6, – С.1361 – 1375.

Надійшла до редколегії 15 02 09

УДК 517.51

О.В. Моторная*, В.П. Моторный**
*Киевский национальный университет им Тараса Шевченко
**Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ЧАСТНЫХ СУММ ФУРЬЕ-ЯКОБИ

Установлено властивості узагальнених констант Лебега сум Фур'є-Якобі.

Пусть $L_{p,w}$, $1 \le p < \infty$, пространство измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций с нормой $\| f \|_{p,w} = \| f w^{1/p} \|_p$, где весовая функция $w(x) = (1-x)^A (1+x)^B$, $A, B > -1$ Если $A = B$, то полагаем $\| f \|_{p,A} = \| f \|_{p,w}$, в частности, $\| f \|_{p,0} = \| f \|_p$. Через $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ будем обозначать многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $(\alpha, \beta > -1)$, и нормированные условием: $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$, а через $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ - частную сумму порядка n ряда Фурье-Якоби функции $f \in L_{p,\rho}$. Известно [4], что для того, чтобы каждая функция $f \in L_{p,w}$ имела ряд Фурье-Якоби, соответствующий весу $\rho(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\alpha+1}{2} - \frac{A+1}{p} > -\frac{\alpha+1}{2}, \qquad \frac{\beta+1}{2} - \frac{B+1}{p} > -\frac{\beta+1}{2}, \tag{1}$$

если $p > 1$, а при $p = 1$ в (1) знак $>$ следует заменить на $\ge$.
Так как $A + 1 > 0$ и $B + 1 > 0$, то левые части неравенств (1) меньше, соответственно, $(\alpha + 1)/2$ и $(\beta + 1)/2$. Поэтому вопрос о сходимости рядов Фурье-Якоби в пространствах $L_{p,w}$ следует рассматривать в случаях

$$\left|\frac{\alpha+1}{2} - \frac{A+1}{p}\right| < \frac{\alpha+1}{2}, \qquad \left|\frac{\beta+1}{2} - \frac{B+1}{p}\right| < \frac{\beta+1}{2}, \tag{2}$$

Заметим, что условия $A > -1$ и $B > -1$ необходимы [4] для того, чтобы для всех $f \in L_{p,w}$ нормы $\| S_n^{(\alpha,\beta)}(f) \|_{p,w}$ были конечны.

Вопрос о сходимости рядов Фурье-Якоби в пространствах $L_{p,w}$ сводится к ограниченности констант Лебега $L_{n,p,w}^{(\alpha,\beta)}$ – норм операторов $S_n^{\alpha,\beta}(f)$:

$$L_{n,p,w}^{(\alpha,\beta)} = \sup_{\|f\|_{p,w} \le 1} \| S_n^{(\alpha,\beta)}(f) \|_{p,w}$$

Наиболее простой случай $\beta = \alpha = -1/2$, $w(x) = \rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Ограниченность констант Лебега $L^{(0,0)}_{n,p,w}$, когда $w(x) = 1$, $x \in [-1,1]$, установлена в [14–17]. Х. Поллард показал, что, если $1 < p < 4/3$, то константы Лебега $L^{(0,0)}_{n,p,w}$, где $w(x) = 1$, ограничены, а если $1 \le p < 4/3$ или $p > 4$ – неограничснны. Дж. Нейман и У. Рудин установили, что при $p = 4/3$ и $p = 4$ константы Лебега также неограниченны. В [1; 5 – 7] получены оценки роста констант Лебега сумм Фурье-Лежандра, точные по порядку, в случаях, когда они неограниченны.

Наиболее общий результат относящийся к рядам Фурье-Якоби получен Б.Маккенхоуптом [13] и формулируется он следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* $1<p<\infty$. *Тогда для того чтобы* $L^{(\alpha,\beta)}_{n,p,w}$ *были ограничены, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\begin{aligned} &|(\alpha+1)/2 - A/p - 1/p| < \min\{1/4, (\alpha+1)/2\}, \\ &|(\beta+1)/2 - B/p - 1/p| < \min\{1/4, (\beta+1)/2\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Отметим, что, если $\alpha, \beta \in (-1\ , -1/2]$ и $1<p<\infty$, то в силу (2) условия (3) заведомо имеют место. Поэтому оценку роста констант Лебега сумм Фурье-Якоби следует находить, когда $\max\{\alpha,\beta\} > -1/2$. Отметим, что константы Лебега сумм Фурье-Якоби в случаях, когда не имеют место условия (3), исследовались в [4; 10 – 12]. Наиболее общий случай рассмотрен в [4].

В [5; 6] было показано, что для функций, имеющих достаточно хорошие дифференциально-разностные свойства частные суммы рядов Фурье-Лежандра осуществляют приближение этих функций по порядку не хуже наилучшего, т. е. было доказано, что в этих случаях рост констант Лебега не влияет на сходимость рядов Фурье-Лежандра. Этот результат был установлен с помощью обобщенных констант Лебега, которые были введены в [5; 6], если $1 \le p \le 4/3$ и $p \ge 4$ следующим образом

$$D^{(0,0)}_{n,p,\gamma} = \sup_{\|f/\sigma(n,\gamma)\|_p \le 1} \|S^{(0,0)}_n(f)\|_p, \quad \text{где} \quad \sigma(n,\gamma,x) = (\sqrt{1-x^2} + 1/n)^\gamma, \quad \gamma \ge 0.$$

Позже в [1] для $1 \le p \le 4/3$ и $p \ge 4$ исследовались обобщенные константы Лебега следующего вида

$$B^{(0,0)}_{n,p,\gamma} = \sup_{\|f\|_q \le 1} \|S^{(0,0)}_n(f)\sigma(n,\gamma)\|_q, \quad \text{где} \ 1/p + 1/q = 1$$

Известно, что поведение частных рядов Фурье-Якоби на отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$ подобно поведению частных сумм рядов Фурье по тригонометрической системе. Например, $\int_a^b |f(x) - S^{(\alpha,\beta)}_n(f,x)\}^p dx \to 0$, когда $n \to \infty$, для любого $p \in (1,\infty)$. Следовательно, особенности поведения частных рядов Фурье-Якоби на отрезке [– 1, 1], такие как сходимость, неограниченный рост констант Лебега, определяются свойствами многочленов Якоби $P^{(\alpha,\beta)}_n(x)$ у концов отрезка $[-1, 1]$. Этим замечанием можно мотивировать введение обобщенных констант Лебега. Оказалось, что в случаях, когда обобщенные константы Лебега ограничены (а константы Лебега неограничены) частные суммы рядов рядов Фурье-Лежандра функции f могут осуществлять приближение функции f по порядку не хуже наилучшего. Это следует из неравенства Лебега и возможности приблизить [8] функцию в пространстве L_p алгебраическими многочленами с весом $(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{-\gamma}$, для некоторых $\gamma \ge 0$, по порядку не хуже наилучшего. Действительно, так как $S_n^{(0,0)}(P_n;x)=P_n(x)$ для любого многочлена $P_n(x)$ степени не выше n, то

$$\| f-S_n^{(0,0)}(f)\|_{L_p} \le \| f-P_n(x)\|_{L_p} + \| S_n^{(0,0)}(f-P_n)\|_{L_p} \le$$
$$\le \| f-P_n(x)\|_{L_p} + D_{n,p,\gamma}^{(0,0)} \left\| \frac{f-P_n}{\sigma(n,\gamma)} \right\|_{L_p}.$$

Если же известен порядок роста констант $B_{n,p,\gamma}^{(0,0)}$, то

$$\| S_n^{(0,0)}(f-P_n)\|_{L_p} = \sup_{\|g\|_{L_q}} \int_{-1}^{1} S_n^{(0,0)}(f-P_n,x)g(x)dx =$$
$$= \sup_{\|g\|_{L_q}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K_n^{(0,0)}(x,t)(f(t)-P_n(t))g(x)dtdx,$$

где $K_n^{(0,0)}(x,t)-$ ядро Кристоффеля-Дарбу, в силу свойств [9] которого интеграл можно представить в виде

$$\sup_{\|g\|_{L_q}} \int_{-1}^{1} S_n^{(0,0)}(g;t)\sigma(n,\gamma,t)\frac{f(t)-P_n(t)}{\sigma(n,\gamma,t)}dt,$$

а затем, используя теорему Фубини, неравенство Гельдера, получим

$$\| S_n^{(0,0)}(f-P_n)\|_{L_p} = B_{n,p,\gamma}^{(0,0)} \left\| \frac{f-P_n}{\sigma(n,\gamma)} \right\|_{p}.$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$B_{n,p,\gamma}^{(0,0)} = D_{n,p,\gamma}^{(0,0)}.$$

Действительно.

$$B_{n,p,\gamma}^{(0,0)} = \sup_{\|f\|_q\le 1} \| S_n^{(0,0)}(f)\sigma(n,\gamma)\|_q = \sup_{\|f\|_q\le 1}\sup_{\|g\|_p\le 1} \int_{-1}^{1} S_n^{(0,0)}(f;x)\sigma(n,\gamma,x)g(x)dx =$$

$$= \sup_{\|f\|_q\le 1}\sup_{\|g\|_p\le 1} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K_n^{(0,0)}(x,t)f(t)dtg(x)\sigma(n,\gamma,x)dx = \sup_{\|f\|_q\le 1}\sup_{\|g\|_p\le 1} \int_{-1}^{1} S_n^{(0,0)}(G;t)f(t)dt,$$

где $G(x) = g(x)\sigma(n,\gamma,x)$. Вычисляя верхнюю грань по всем f из единичного шара пространства L_q получим

$$B^{(0,0)}_{n,p,\gamma} = \sup_{\left\|\frac{G}{\sigma(n,\gamma)}\right\|_p \le 1} \| S^{(0,0)}_n(G)\|_p = D^{(0,0)}_{n,p,\gamma}.$$

Константы $B^{(0,0)}_{n,p,\gamma}$ и $D^{(0,0)}_{n,p,\gamma}$ можно использовать и для оценки уклонений сумм Фурье $S^{(0,0)}_n(f)$ от f с весом $\sigma(n,\gamma,x)$ [4, § 4] для $p \ge 4$.

Теорема 3. *Пусть* $4 \le p < \infty$. *Имеет место неравенство*

$$\| S^{(0,0)}_n(f - P_n)\sigma(n,\gamma)\|_p \le \| f - P_n\|_p\, D^{(0,0)}_{n,p,\gamma}.$$

Доказательство. Используя свойства ядра Кристоффеля-Дарбу и применяя теорему Фубини получим

$$\| S^{(0,0)}_n(f - P_n)\sigma(n,\gamma)\|_p \le \sup_{\|g\|_q \le 1} \int_{-1}^{1} S^{(0,0)}_n(f - P_n, x)\sigma(n,\gamma,x)g(x)dx =$$

$$= \sup_{\|g\|_q \le 1} \int_{-1}^{1} (f(t) - P_n(t)S^{(0,0)}_n(G,t)dt, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

где $G(x) = g(x)\sigma(n,\gamma,x)$. Интеграл оценим используя неравенство Гельдера. Тогда

$$\| S^{(0,0)}_n(f - P_n)\sigma(n,\gamma)\|_p \le \| f - P_n\|_p \sup_{\left\|\frac{G}{\sigma(n,\gamma)}\right\|_q \le 1} \| S^{(0,0)}_n(G)\|_q = \| f - P_n\|_p\, D^{(0,0)}_{n,q,\gamma}.$$

В общем случае обобщенные константы Лебега определим равенством

$$D^{(\alpha,\beta,A,B)}_{n,p,\gamma,\delta} = \sup_{\|f/\sigma(n,\gamma,\delta)\|_{p,A,B} \le 1} \| S^{(0,0)}_n(f)\|_{p,A,B},$$

где $\sigma(n,\gamma,\delta,x) = (\sqrt{1-x} + 1/n)^{\gamma}(\sqrt{1+x} + 1/n)^{\delta}$, $\gamma,\delta \ge 0$.

Понятно, что оценки обобщенных констант Лебега следует находить лишь тогда, когда константы Лебега неограниченны, т.е. когда не имеет место хотя бы одно из условий (3). В [2] исследовались обобщенные константы Лебега для ультрасферических многочленов $P^{(\alpha,\alpha)}_n(x)$ и весовой функции $w(x) = (1-x^2)^{\alpha}$, если $\alpha \in (-0{,}5;\ 0)$. Пусть $\alpha = A$, $\beta = B$, $\mu = \mu(\alpha,p) = (\alpha+1)(1/2 - 1/p)$, $\nu = \nu(\beta,p) = (\beta+1)(1/2 - 1/p)$. Если p меняется от 1 до ∞, то μ меняется от $-(\alpha+1)/2$ до $(\alpha+1)/2$ (соответственно ν меняется от $-(\beta+1)/2$ до $(\beta+1)/2$). Так как в случае $\alpha = \beta = 0$ константы $D^{(0,0)}_{n,p,\gamma}$ ограничены для $p \in (1;\ 4/3]$, если $\gamma > 2/p - 3/2$, и совпадают по порядку с константами $L^{(0,0)}_{n,p}$, если $p > 4$, то естественно предположить, что обобщенные константы Лебега будут ограничены в случае $\mu \in (-(\alpha+1)/2; -1/4]$, $\nu \in (-(\beta+1)/2; -1/4]$. Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $\alpha,\beta>-1/2, \alpha=A,\ \beta=B, \theta=-2\mu-1/2,\ \eta=-2\nu-1/2$ *и* $1/p+1/q=1$ *Тогда для любой функции* $f\in L_{p,w}$ *имеет место неравенство*

$$D_{n,p,\gamma,\delta}^{\alpha,\beta\,\alpha\,\beta}\le\begin{cases}C_{\gamma,\delta},\ \gamma>\theta,\ \delta>\eta,\\ C_{\mu,\nu}Ln^{1/q}(n+1), \gamma=\theta>0 \text{ or } \delta=\eta>0,\\ C_pLn(n+1),\ \gamma=\theta=0 \text{ or } \delta=\eta=0.\end{cases}$$

Замечание. В последней формуле и всюду в дальнейшем константы обозначаются буквой С, хотя в разных местах С – разные, а величины, зависящие от параметров обозначаются буквой С, снабженной индексами, от которых С зависит.

Доказательство. В силу равенства [9, стр 71] $P_n^{(\alpha;\beta)}(x)=(-1)^nP_n^{(\beta;\alpha)}(-x)$ достаточно оценить

$$\int_{-1}^{1}\left|\int_{0}^{1}K_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)f(y)(1-y)^\alpha dy\right|^p(1-x^2)^\alpha dx, \tag{4}$$

где ядро Кристоффеля-Дарбу можно представить [12] в виде

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)=a_nh_1(n,x,y)+b_n(h_2(n,x,y)+h_3(n,x,y)), \tag{5}$$

где

$$h_1(n,x,y)=(n+1)P_n^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(y),$$
$$h_3(n,y,x)=h_2(n,x,y)=\frac{n(1-y^2)P_n^{\alpha,\beta}(x)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(y)}{x-y}, \tag{6}$$

а a_n, b_n – ограниченные последовательности. Чтобы оценить интеграл (4), благодаря представлению (5) и ограниченности последовательностей a_n, b_n, достаточно оценить интегралы

$$I_k=\int_{-1}^{1}\left|\int_{0}^{1}h_k(n;x;y)f(y)(1-y)^\alpha dy\right|^p(1-x^2)^\alpha dx,\quad k=1,2,3.$$

Интегралы I_1, I_2 оцениваются точно также как в [3], а интеграл I_3 оценим иначе. Для этого воспользуемся оценкой многочленов Якоби

$$|P_n^{(\alpha;\beta)}(x)|\le Cn^{-1/2}(1-x+n^{-2})^{-\alpha/2-1/4},\quad 0\le x\le 1, \tag{7}$$

и следующими вспомогательными утверждениями, полученными в [13].

Предложение 1. Если $1<p<\infty; r,s<-1$ и $F(x)=\int_0^x|f(t)|dt$, то существует постоянная C, не зависящая от $f(x)$, такая, что

$$\int_0^\infty x^r (1+x)^{s-r} F^p(x) dx \le C \int_0^\infty x^{p+r} (1+x)^{s-r} |f(x)|^p dx .$$

Предложение 2. Если $1 < p < \infty; r, s > -1$ и $F(x) = \int_x^\infty |f(t)| dt$, то существует постоянная C, не зависящая от $f(x)$, такая, что

$$\int_0^\infty x^r (1+x)^{s-r} F^p(x) dx \le C \int_0^\infty x^{p+r} (1+x)^{s-r} |f(x)|^p dx .$$

Предложение 3. Пусть $\omega(x)$- положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\omega(2^n) \le B\omega(x) \le B^2 \omega(2^n), x \in [2^n, 2^{n+1}], \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где B - некоторая постоянная, и $\tilde{f}(x) = \text{V.P.} \int_{x/2}^{3x/2} \frac{f(y)}{x-y} dy$. Тогда существует постоянная C, зависящая только от p и B, такая, что

$$\int_0^\infty |\tilde{f}(x)|^p \omega(x) dx \le C \int_0^\infty |f(x)|^p \omega(x) dx, \quad 1 < p < \infty .$$

Кроме того будем использовать леммы 1, 2, доказанные в [2].

Лемма 1. Пусть $\alpha \in (0, -1/2]$, $n \ge 2$. Тогда существует константа C такая, что

$$\int_0^1 (1 - x + n^{-1})^{-1-\alpha} (1-x)^\alpha dx \le C \ln n.$$

Лемма 2. Пусть $\alpha \in (0, -1/2]$, $\beta > 0$. Тогда существует константа C_β, зависящая от β, такая, что

$$\int_0^1 (1 - x + n^{-1})^{\beta-1-\alpha} (1-x)^\alpha dx \le C_\beta .$$

Промежуток интегрирования $[-1;1]$ в интеграле I_3 предстпвим в виде $[-1; -1/2] \cup [-1/2; 1]$ и и обозначим интеграл по промежутку $[-1; -1/2]$ через $I_{3,1}$, по промежутку $[-1/2; 1]$ через $I_{3,2}$. Тогда в силу $(6 - 7)$ и неравенства $|x - y| \ge 1/2$:

$$I_{3,1} \le C_p \int_{-1}^0 \left(1 + x + 1/n^2\right)^{-p\left(\frac{\beta}{2} + \frac{3}{4}\right)} (1+x)^{p+\beta} dx \left(\int_0^1 |f(y)| \left(1 - y + 1/n^2\right)^{-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}} (1-y)^\alpha dy \right)^p .$$

Так как $\nu \le -1/4$, то $p + \beta - \beta p/2 - 3p/4 \ge p - 1 > 0$, и, следовательно, интеграл по промежутку $[-1; 0]$, в силу леммы 2, ограничен константой

C_p Применяя неравенство Гельдера к интегралу по промежутку $[0;1]$, в силу лемм 1 и 2, получим

$$I_{3,1} \le \begin{cases} C_\gamma \| f/\sigma(n,\lambda,\delta)\|_{p,w}, & \gamma > -2\mu - 1/2 \ge 0, \\ C_p L n^{p/q}(n+1)\| f/\sigma(n,\lambda,\delta)\|_{p,w}, & \gamma = -2\mu - 1/2 \ge 0. \end{cases}$$

В интеграле $I_{3,2}$ сделаем замену переменных: $u = n^2(1-x); v = n^2(1-y)$, а затем внутренний интеграл по отрезку $[0;n^2]$ разобъем на три: по отрезкам $[0,u/2]$, $[u/2;3u/2]$, $[3u/2;n^2]$ и, используя (6 – 7) представим $I_{3,2}$ в виде суммы трех интегралов $I_3^1 + I_3^2 + I_3^3$:

$$n^{-2(1+\alpha)}\int_0^{3n^2/2}\left|\left(\int_0^{u/2} + \int_{u/2}^{3u/2} + \int_{3u/2}^{n^2}\right)\frac{f(y)\varphi(x,y)v^\alpha dv}{(1+v)^{\alpha/2+1/4}(u-v)}\right|^p \frac{u^{\alpha+p}du}{(1+u)^{p\alpha/2+3p/4}},$$

где $\varphi(x,y)$ – ограниченная функция. Если $\mu < -1/4$, то, возвращаясь к переменным x,y, получим

$$I_3^1 \le C_p\left(\int_0^1 \frac{|f(y)|(1-y)^\alpha dy}{\left(1-y+n^{-2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}\right)^p \int_{-1/2}^1 \frac{(1-x)^\alpha dx}{\left(1-x+n^{-2}\right)^{p\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)}} = C_p K_1 K_2.$$

Так как $\alpha - \alpha p/2 - 3p/4 > -1$, то $K_2 \le C_3$. Величину K_1 оценим, используя неравенство Гельдера

$$K_1 \le \begin{cases} C_{\gamma,p} \| f/\sigma(n,\lambda,\delta)\|_{p,w}, & \gamma > -2\mu - 1/2 \ge 0, \\ C_p L n^{p/q}(n+1)\| f/\sigma(n,\lambda,\delta)\|_{p,w}, & \gamma = -2\mu - 1/2 \ge 0, \end{cases} \tag{8}$$

так как $\alpha - \alpha p/2 - 3p/4 > -1$.

Пусть $\mu = -1/4$. Считая $\gamma > 0$, получим

$$I_3^1 \le C_p n^{-2(1+\alpha)}\int_0^{\frac{3n^2}{2}}\left(\int_0^u \frac{|f(y)|v^\alpha dv}{(1+v)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\gamma}{2}}}\right)^p \frac{u^\alpha du}{(1+u)^{p\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}} \le$$

$$\le C_p\left(\int_0^1 \frac{|f(y)|(1-y)^\alpha dy}{\left(1-y+n^{-2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}}\right)^p \int_{-1/2}^1 \frac{(1-x)^\alpha dx}{\left(1-x+n^{-2}\right)^{p\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}} = C_p T_1 T_2.$$

Величину T_1 оценим используя неравенство Гельдера: $T_1 \le C_{\gamma,p} \| f/\varphi(n,\gamma,\delta)\|_{p,w}$, а так как $\alpha - \alpha p/2 - 3p/4 + \gamma p/2 = -1 + \gamma p/2 > -1$, то $T_2 \le C_{\gamma,p}$.

Если же $\gamma = 0$ и $\mu = -1/4$, то так как $\alpha - \alpha p/2 - 3p/4 = -1$, то в силу леммы 1, интеграл $\int_{-1/2}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}dx}{\left(1-x+n^{-2}\right)^{\alpha p/2+3p/4}}=CLn(n+1)$. Используя неравенство

(8) для $\gamma=0$, в этом случае получим $I_3^1\le C_pLn^p(n+1)$. Интеграл I_3^2 оценим, используя предложение 3: $I_3^2\le C_p\parallel f\parallel_{p,w}^p$. Чтобы оценить I_3^3, заметим, что из неравенства $v>3u/2$ следуют неравенства $v-u\ge u/2$ и $v-u\ge v/3$, используя которые, в силу предложения 2, получим $I_3^3\le C_p\parallel f\parallel_{p,w}^p$. В заключение отметим, что частные случаи теоремы 4 есть в [10 – 11].

Библиографические ссылки

1. **Бадков В.М.** Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам/В.М. Бадков// УМН. – 1978. – Т. 33, № 4. – С. 51 –106.
2. **Гончаров С.В.** О сходимости рядов Фурье-Якоби в среднем/С.В. Гончаров, В.П. Моторный//Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика.–2008, вип. 13.– С. 49 – 55.
3. **Гончаров С.В.** Оценки обобщенных констант Лебега частных сумм Фурье-Якоби /С.В. Гончаров, В.П. Моторный//Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2007, № 8, вип. 12. – С. 70 – 83.
4. **Казакова Н.М.** О порядках констант Лебега сумм Фурье-Якоби в пространствах L_p^r /Н.М. Казакова//Деп. в ВИНИТИ. – Свердловск, 1981. – 54 с.
5. **Моторный В.П.** О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра/В.П. Моторный// ДАН СССР, 1972. – Т. 204, № 4. – С. 788 –790.
6. **Моторный В.П.** О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра/В.П. Моторный //Изв. АН СССР. Сер. Мат.–1973.– 37, №1.– С. 135 – 147.
7. **Моторный В.П.** Приближение функций суммами Фурье-Лежандра в среднем/ В.П. Моторный // ДАН СССР, 1981. – Т. 259, №1. – С. 39 – 42.
8. **Моторный В.П.** Приближение функций алгебраическими многочленами в метрике L_p /В.П. Моторный //Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1971. – 35, № 4. – С. 874 – 899.
9 **Сегё Г.** Ортогональные ряды/Г. Сегё//– М; 1962. – 500 с.
10. **Ходак Л.Б.** О сходимости рядов Фурье-Якоби в интегральной метрике/ Л.Б. Ходак//Деп. в Укр. НИИНТИ. – Д. 1979. – 29 с.
11. **Ходак Л.Б.** Сходимость рядов Фурье по многочленам Якоби в среднем/ Л.Б. Ходак // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982, № 8. – С. 28 – 31.
12. **Muckehoupt B.** Mean convergence of Jacobi series//Proc. Amer. Math. Soc. 1969. – 23, №2. – P. 306 –310.
13. **Muckehoupt B.** Mean convergence of Hermite-Laguerre series 11//Trans. Amer. Math. Soc. 1970. – Vol. 147, 69. – №2. – P. 433 –460.
14. **Neuman J. and Rudin W.** Mean convergence of ortogonal series//Proc. Amer. Math. Soc. 1952. – 3. – P. 219 – 222.
15. **Pollard H.**The mean convergence of ortogonal series//Trans. Amer. J.Math. Soc.1947. – 62. – P. 387 – 403; Ibedem, 1948. – 63. – P. 355 –367.
16. **Pollard H.** The mean convergence of ortogonal series// Duke Math. J. 1949. 1948. – 16, № 1. –P. – 189 – 191.
17. **Wing G.M.** The mean convergence of ortogonal series//Amer. J.Math. 1950. – 72. – P. 792 – 807.

Надійшла до редколегії 04 03.09

УДК 517.5

А. Н. Пасько

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

НАИЛУЧШЕЕ ОДНОСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ W^rH^ω С УЧЁТОМ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ НА ОТРЕЗКЕ

Покращено залишковий член в одержаній раніше оцінці найкращих односторонніх наближень класів W^rH^ω з урахуванням місцезнаходження точки на відрізку.

Под $\omega(t)$ мы будем понимать выпуклый модуль непрерывности, для которого $t\omega'(t)$ не убывает. Символом W^rH^ω будем, как всегда обозначать класс определённых на отрезке $[-1;\ 1]$ функций f, таких что $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, а $\omega(f^{(r)},t)\le\omega(t)$.

В [1] установлена следующая оценка наилучших приближений классов W^rH^ω с учётом положения точки на отрезке.

Теорема А. *Для любой функции* $f\in W^rH^\omega$ *существует последовательность алгебраических многочленов* $P_{n,r}(x)$ *степени* $n=r,r+1,\dots$ *(при* $r=0$ $n\ge 2$*) таких, что выполняется неравенство*

$$\left|f(x)-P_{n,r}(x)\right|\le\frac{K_r}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r\omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_rn}\sqrt{1-x^2}\right)+$$

$$+C_r\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^r\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}{n^r}. \qquad (1)$$

Здесь и далее под C_r мы понимаем некоторую, зависящую только от r, постоянную. Конкретное же её значение в различных местах может быть разным.

В [2] получена следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы А для односторонних приближений.

Теорема В. *Для любой функции* $f\in W^rH^\omega$ *существует последовательность алгебраических многочленов* $P^+_{n,r}(x)$ *степени* $n=2r+1,2r+2,\dots$ *(при* $r=0$ $n\ge 2$*) таких, что выполняются неравенства*

$$0\le P^+_{n,r}(x)-f(x)\le K_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r\omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_rn}\sqrt{1-x^2}\right)+$$

$$+\frac{C_r}{n^r}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^r \omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \tag{2}$$

при чётном r, и

$$0 \le P^+_{n,r}(x)-f(x) \le K_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sqrt{1-x^2}\right)+$$
$$+\frac{C_r}{n^r}\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)+\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^r\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right) \tag{3}$$

при r нечётном.

Отметим, что остаточный член в неравенстве (3) несколько хуже остаточного члена в неравенстве (2) за счёт наличия в первом слагаемого вида $\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\omega\left(1/n^2\right)$. Например, выберем последовательность x_n так, чтобы $\sqrt{1-x_n^2} \cong 1/n$ при $n\to\infty$. Тогда остаточный член в (2) будет иметь, с точностью до мультипликативной постоянной, вид $n^{-2r}\omega\left(\ln n/n^2\right)$, а остаточный член в (3) примет вид $n^{-2r+1}\omega\left(1/n^2\right)+n^{-2r}\omega\left(\ln n/n^2\right)$. Если взять в качестве $\omega(t)$ модуль непрерывности $\omega(t)=t^\alpha$, то первое выражение будет стремиться к нулю быстрее второго.

В данной работе удалось избавиться от слагаемого $\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\omega\left(1/n^2\right)$ в остаточном члене неравенства (3). Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого целого неотрицательного* r *и для любой функции* $f\in W^rH^\omega$ *существует последовательность алгебраических многочленов* $P^+_{n,r}(x)$ *степени* $n-2r+1, 2r+2,\ldots$ *(при* $r=0$ $n\ge 2$*) таких, что выполняются неравенства*

$$0 \le P^+_{n,r}(x)-f(x) \le K_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sqrt{1-x^2}\right)+$$
$$+\frac{C_r}{n^r}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^r\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{4}$$

Поскольку при чётном r утверждение теоремы 1 содержится в теореме B, мы должны доказать (4) только для случая нечётного r. Для этого нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть α – произвольная постоянная. Тогда для любого натурального n существует алгебраический многочлен $Q_n(x)$, степени не выше n такой, что для всех $x\in[-1;1]$

$$0 \le Q_n(x) - \sqrt{1-x^2}\,\omega\left(\frac{\alpha}{n}\sqrt{1-x^2}\right) \le$$

$$\le C\left(\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \tag{5}$$

где C – зависящая только от α постоянная.

Доказательство. Рассмотрим заданную на отрезке $[-1;1]$ нечётную функцию $\varphi(t)$, определённую для всех $t \ge 0$ равенством $\varphi(t) = \omega\left(\frac{\alpha}{n}t\right)$. Модуль непрерывности этой функции $\omega(\varphi,\delta) \le 2\omega\left(\frac{\alpha\delta}{n}\right)$, поэтому согласно теореме Джексона существует последовательность алгебраических полиномов $u_n(t)$ степени не выше n–1, для которых

$$|\varphi(t) - u_n(t)| \le C\omega\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{6}$$

В силу нечётности функции $\varphi(t)$ мы можем считать, что полином $u_n(t)$ также нечётный. Сделаем в (6) замену $t = \sqrt{1-x^2}$ и умножим полученное неравенство на $\sqrt{1-x^2}$. Тогда для всех $x \in [-1;1]$

$$\left|\sqrt{1-x^2}\,\omega\left(\frac{\alpha}{n}\sqrt{1-x^2}\right) - \sqrt{1-x^2}\,u_n(\sqrt{1-x^2})\right| \le C\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{1-x^2}. \tag{7}$$

В силу нечётности полинома $u_n(t)$ функция $q_n(x) = \sqrt{1-x^2}\,u_n\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ является алгебраическим многочленом степени не выше n относительно переменной x. Перепишем (7) в виде

$$0 \le q_n(x) - \sqrt{1-x^2}\,\omega\left(\frac{\alpha}{n}\sqrt{1-x^2}\right) + C\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{1-x^2} \le 2C\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{1-x^2}. \tag{8}$$

Известно, что для любого n существует алгебраический многочлен $p_n(x)$ степени не выше n такой, что для всех $x \in [-1;1]$

$$\left|\sqrt{1-x^2} - p_n(x)\right| \le \frac{\pi}{2n}.$$

Из последнего неравенства следует, что многочлен $p_n^+(x) = p_n(x) + \frac{\pi}{2n}$ удовлетворяет для всех $x \in [-1;1]$ неравенству

$$0 \le p_n^+(x) - \sqrt{1-x^2} \le \frac{\pi}{n}. \tag{9}$$

Сложив (8) с умноженным на $C\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)$ неравенством (9) получим нужное нам неравенство (5). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любого* $r \in N$ и любого натурального $n \geq 2r$ *существует* алгебраический полином $h^{+}_{n,r}(x)$ степени не выше n, удовлетворяющий неравенству

$$0 \leq h^{+}_{n,r}(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r \leq \frac{2\pi r}{n}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}. \qquad (10)$$

Доказательство леммы 2 содержится в [2].

Приступим к доказательству теоремы 1. Для произвольного нечётного r запишем неравенство (1) в виде

$$0 \leq P_{n,r}(x) - f(x) + \frac{K_r}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sqrt{1-x^2}\right) +$$

$$+ C_r n^{-r}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^r \omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \leq$$

$$\leq K_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sqrt{1-x^2}\right) + 2C_r n^{-r}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^r \omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \qquad (11)$$

Сложив (11) с умноженным на $2^{-1}K_r n^{-r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}$ неравенством (5) (в котором мы полагаем $\alpha = 2K_{r+1}/K_r$) и умноженным на $C_r n^{-r}\omega\left(n^{-2}\ln n\right)$ неравенством (10) и выполнив несложные арифметические преобразования получим неравенство (4). Теорема 1 доказана.

Библиографические ссылки

1. **Моторный В. П.** Приближение функций класса H^{ω} алгебраическими многочленами с учётом положения точки на отрезке. / В. П. Моторный // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика.–2005, Вип. 10, С. 82–85.
2. **Пасько А. Н.** Одностороннее приближение функций с учётом положения точки на отрезке. / А. Н. Пасько // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика.–2005, Вип. 10, С. 86–91.

Надійшла до редколегії 17 01 09

УДК 517.51

В.И. Рубан

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ИНТЕРВАЛ, НАКРЫВАЮЩИЙ ОЦЕНКУ ДИСПЕРСИИ, ВЫЧИСЛЯЕМУЮ ПО ИНТЕРВАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Знайдені значення нижньої та верхньої меж оцінки дисперсії за інтервальними даними *для кожної* реалізації вибірки.

В интервальном анализе [1; 2] настоящее значение величины x и измеренное значение y различаются на погрешность, $x = y + \varepsilon$, которая возникает, как результат измерения, вычислений с конечным числом значащих цифр, технологических допусков. Приведем некоторые определения статистики интервальных данных согласно [2].

Обозначим через $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x \in R^n$ реализацию выборки из произвольного распределения F, через $(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y \in R^n$ и $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \varepsilon \in R^n$ – вектора полученных (приближенных) значений и погрешностей. Далее, через θ обозначим неизвестный числовой параметр распределения F, θ_x, θ_y – оценки параметра F, использующие одну и ту же статистику, вычисленные для векторов x и y соответственно. Кроме того, пусть

$$\max_i |\varepsilon_i| \le \Delta. \tag{1}$$

Исследователю доступно значение θ_y, поэтому возникает задача построения на основе этой информации інтервала, который накрывает неизвестное значение θ_x.

Мы рассматриваем эту задачу для случая, когда оценивается дисперсия с помощью стандартной оценки s^2

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

В [2] найдено асимптотическое (с точностью до $O(\Delta^2)$) значение границ интервала, накрывающего s_x^2, наименьшего среди всех интервалов, симметричных относительно s_y^2 .В данной работе найдены точные для каждого Δ из (1) и каждого вектора y значений вехъняя и нижняя границы значений величины s_x^2.

Введем некоторые обозначения, которые понадобятся в дальнейшем.. Через R^n_{cov} обозначим факторпространство R^n по подпространству векторов с одинаковыми координатами,

$$R^n_{cov} = R^n / \{x : x_i = x_j \quad \text{äëÿ âñåõ } i, j\}.$$

Далее, $[x]$ – элемент R^n_{cov}, представителем которого является x. В R^n_{cov} введем скалярное произведение, $([x],[y]) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$.

Доказательство следующей далее леммы очевидно.

Лемма. *Пространством, сопряженным к* R^n_{cov}, *является пространство*

$$R^n_0 = \left\{ \varphi \in R^n : \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 0 \right\}, \qquad \langle \varphi, [x] \rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i.$$

Задачу нахождения интервала, накрывающего θ_{s^2} теперь можно переформулировать следующим образом.

Пусть E_Δ – подмножество R^n_{cov}, $E_\Delta = \{[\varepsilon] : |\varepsilon_i| \le \Delta, i = 1, \ldots, n\}$.

Для заданного y нужно найти величины

$$\alpha(y) = \inf_{\varepsilon \in F_\Delta} \|[y+\varepsilon]\|, \qquad \beta(y) = \sup_{\varepsilon \in F_\Delta} \|[y+\varepsilon]\|.$$

Задача нахождения $\alpha(y)$ – это задача приближения элемента банахова пространства выпуклым множеством. Применяя соотношение двойственности и непосредственно оценивая $\beta(y)$, получим следующую теорему

Теорема. *Для каждого* Δ *и каждого вектора значений* y *верны оценки*

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \Delta sign\, y_i - \bar{y} - \frac{\Delta}{n} \sum_{i=1}^{n} sign\, y_i \right)^2 \le s_x^2 \le .$$

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \Delta^2 + \frac{2\Delta}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}).$$

Библиографические ссылки

1. **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ/С.П Шарый//"XYZ"-2002. –700 с.
2. **Орлов. А.И.** Нечисловые статистики/А.И. Орлов.//М3-Пресс,-2004.-513 с.

Надійшла до редколегії 18 03 09

УДК 517.5

С.В. Савела

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

О ПОПЕРЕЧНИКАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Отримано точні значення слабких поперечників одного класу 2π-періодичних функцій зі значеннями у сепарабельному гільбертовому просторі, означеного за допомогою модулів неперервності.

Пусть $L_2([0; 2\pi))$ – пространство 2π-периодических функций $f: R \to R$ с соответствующей нормой $\|\cdot\|_2$.

В 1936 году А.Н. Колмогоров [5], ввёл понятие поперечника множества, и доказал, что среди всех подпространств из $L_2([0; 2\pi))$ размерности 2n-1 подпространство полиномов T_{n-1} порядка не выше n-1 реализует минимум наилучших приближений класса вещественных функций $W^r{}_2 = \{f(x): \|f^{(r)}\|_2 \le 1\}$

$$d_{2n-1}(W^r{}_2, L_2([0; 2\pi))) = E_n(W^r{}_2) = 1/n^r .$$

В 1977 году Л.В. Тайковым [7] получено точное неравенство оценивающее наилучшее приближение периодической дифференцируемой функции $f(x) \in L_2(0; 2\pi)$ через модуль непрерывности её производной некоторого порядка

$$E_n(f) \le \frac{1}{4n^{(r-1)}} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, x)dx \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

и доказано, что если $W_2^{r,n} = \left\{ f(x): \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, x)dx \le 1 \right\}$, то

$$d_{2n-1}(W_2^{r,n}, L_2([0; 2\pi))) = \frac{1}{4n^{r-1}}. \tag{1}$$

В данной работе мы получим обобщение соотношения (1) на случай 2π-периодических функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Пусть H – вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. 2π-периодическая функция $f: R \to H$ называется простой, если существуют элементы $C_k \in H$, k= 1, 2 … n, и измеримые множества $E_k \subset [0;\ 2\pi)$ такие, что $E_k \cap E_l = \varnothing$ при $k \neq l$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k = [0;\ 2\pi)$ и $f(t) = C_k$, если $t \in E_k$.

Для определённой таким образом простой функции f(t) интеграл Бохнера определяется соотношением

$$(B)\int_0^{2\pi} f(t)dm(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k m(E_k)$$

(dm(t) – мера Лебега) [4, гл.5; 6, гл.6, 7]. Если для 2π-периодической функции $f : R \to H$ существует последовательность 2π-периодических простых функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что для почти всех $t \in [0;\ 2\pi)$

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n(t) - f(t) \| = 0,$$

то функция f(t) называется сильно измеримой.

2π-периодическая функция f(t) интегрируема в смысле Бохнера на $[0;\ 2\pi)$, если она сильно измерима на этом множестве, и если для любой последовательности простых интегрируемых функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n(t) - f(t) \| = 0$ почти всюду на $[0;\ 2\pi)$, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \| f_n(t) - f(t) \| \, dm(t) = 0.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} (B)\int_0^{2\pi} f_n(t)dm(t) = (B)\int_0^{2\pi} f(t)dm(t),$$

который называется интегралом Бохнера от функции f на $[0;\ 2\pi)$.

Множество функций $f : [0;\ 2\pi) \to H$, интегрируемых по Бохнеру на $[0;\ 2\pi)$, является линейным пространством. Через $L_2([0;\ 2\pi), H)$ обозначим множество функций из данного пространства, таких что

$$\int_0^{2\pi} \| f(x) \|^2 \, dx < \infty.$$

В $L_2([0;\ 2\pi), H)$ соотношениями

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} (f(x), g(x))dx$$

и

$$\| f \|_{2,H}^2 := (B)\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(x), f(x))dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \| f(x) \|^2 \, dx$$

определяется скалярное произведение и норма. Пространство $L_2([0;\ 2\pi), H)$ является гильбертовым.

Наилучшим приближением функции $f \in L_2([0; 2\pi), H)$ подпространством $G \subset L_2([0; 2\pi), H)$ называется величина

$$E(f, G)_{2,H} = \inf_{g \in G} \| f - g \|_{2,H},$$

а наилучшим приближением некоторого класса функций $Q \subset L_2([0; 2\pi), H)$ подпространством G – величина

$$E(Q, G)_{2,H} = \sup_{f \in Q} E(f, G)_{2,H}.$$

Модулем непрерывности функции в пространстве $L_2([0; 2\pi), H)$ называется

$$\omega(f; t)_{2,H} = \sup_{|u| \le t} \| f(\cdot + u) - f(\cdot) \|_{2,H}, \quad t \ge 0.$$

В качестве G будем использовать множество T^{H}_{2n-1} обобщенных тригонометрических полиномов порядка не выше n–1 вида

$$T_{n-1}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \qquad \text{где } a_k, b_k \in H.$$

Каждой 2π – периодической функции $f \in L_2([0; 2\pi), H)$ поставим в соответствие ряд, который называется рядом Фурье данной функции

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt),$$

где

$$A_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \quad (k \ge 0);$$

$$B_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt, \quad (k \ge 1).$$

Через $s_n(f; t)$ обозначим частную сумму ряда Фурье

$$s_n(f; t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (A_k \cos kt + B_k \sin kt).$$

Известно, что имеет место равенство Парсеваля [3, § 5.4.9]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \| f(t) \|^2 dt = \frac{\| A_0 \|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2).$$

Кроме того

$$E^2(f, T^{H}_{2n-1})_{2,H} = \| f - s_n(f) \|^2_{2,H} = \pi \sum_{k=n}^{\infty} (\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2).$$

В данной работе будем рассматривать класс функций $L_{2,H}^{\Lambda,M}$ пространства $L_2([0;\,2\pi),\,H)$, который задаётся следующим образом. Пусть последовательности чисел $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k\in N}$, $M=\{\mu_k\}_{k\in N}$ таковы, что $\left\{\frac{|\lambda_k|}{k}\right\}$, $\left\{\frac{|\mu_k|}{k}\right\}$, $\{|\lambda_k|\}$ и $\{|\mu_k|\}$ не убывают при $k\to+\infty$, $|\lambda_k|=|\mu_k|$. Для функций $f\in L_2([0;\,2\pi),\,H)$ и последовательностей Λ и M положим

$$f^{(\Lambda,M)}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k A_k\cos kt+\mu_k B_k\sin kt).$$

Пусть

$$L_{2,H}^{\Lambda,M}=\{\,f\in L_2([0;\,2\pi),\,H):\ \|f^{(\Lambda,M)}\|_{2,H}^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2\,(\|A_k\|^2+\|B_k\|^2)<\infty\,\}.$$

Далее, для любого натурального n, также будем рассматривать класс функций

$$W_{2,H}^{\Lambda,M,n}=\left\{f(t)\in L_2([0;2\pi),H):\int_0^{\pi/n}\omega(f^{(\Lambda,M)},t)dt\le 1\right\}.$$

Ниже получена точная оценка наилучшего приближения функции $f\in L_{2,H}^{\Lambda,M}$ посредством модуля непрерывности функции $f^{(\Lambda,M)}$ и найдены слабые поперечники класса функций $W_{2,H}^{\Lambda,M,n}$.

Теорема 1. *Для любой функции f(x) и любого натурального n имеет место неулучшаемое неравенство*

$$E(f,\,T_{2n-1}^{H})_{2,H}\le\frac{n}{4|\lambda_n|}\int_0^{\pi/n}\omega(f^{(\Lambda,M)},t)dt. \qquad (2)$$

Доказательство. При доказательстве будем существенно использовать метод, изложенный в работе [7].Так как

$$E^2(f,\,T_{2n-1}^{H})_{2,H}=\|\,f-s_n(f)\,\|_{2,H}^2,$$

$$\omega\,(f^{(\Lambda,M)}-s_n(f^{(\Lambda,M)}),\,x)\le\ \omega\,(f^{(\Lambda,M)},\,x)$$

можно ограничиться рассмотрением функций f(x), которые ортогональны всем полиномам $\{T_{n-1}\}$ порядка не выше n-1.Тогда, поскольку последовательности $\frac{|\lambda_k|}{k}$ и $\frac{|\mu_k|}{k}$ не убывают с ростом k, будем иметь

$$E^2(f,\,T_{2n-1}^{H})_{2,H}=\|\,f\,\|_{2,H}^2=\pi\sum_{k=n}^{\infty}(\|A_k\|^2+\|B_k\|^2)=$$

$$=\pi\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|\lambda_k|^2}{k^2}(\|A_k\|^2+\|B_k\|^2)\frac{k^2}{|\lambda_k|^2}\le\frac{n^2}{|\lambda_n|^2}\|f^{(\Lambda_1,M_1)}\|_{2,H}^2,$$

где $\Lambda_1=\{\frac{\lambda_k}{-k}\}_{k\in N}$, $M_1=\{\frac{\mu_k}{k}\}_{k\in N}$.

Рассмотрим оператор

$$A(f^{(\Lambda_1,M_1)},x)=\frac{n}{2}\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n}f^{(\Lambda_1,M_1)}(x+t)\cos(nt)dt=$$

$$=\frac{n}{2}\int_{0}^{\pi/2n}[f^{(\Lambda_1,M_1)}(x+t)+f^{(\Lambda_1,M_1)}(x-t)]\cos(nt)dt.$$

Ясно, что

$$\|f^{(\Lambda_1,M_1)}\|_{2,H}\le\|f^{(\Lambda_1,M_1)}(x)-A(f^{(\Lambda_1,M_1)},x)\|_{2,H}+\|A(f^{(\Lambda_1,M_1)},x)\|_{2,H}.$$

Для каждого слагаемого в правой части последнего неравенства запишем оценку сверху

$$\|f^{(\Lambda_1,M_1)}(x)-A(f^{(\Lambda_1,M_1)},x)\|_{2,H}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2n}\|f^{(\Lambda,M)}(x+t)-f^{(\Lambda,M)}(x-t)\|(1-\sin(nt))dt$$

и

$$\|A(f^{(\Lambda_1,M_1)},x)\|_{2,H}\le\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2n}\|f^{(\Lambda,M)}(x+t)-f^{(\Lambda,M)}(x-t)\|\sin(nt)dt.$$

Объединяя эти оценки, получим

$$\|f^{(\Lambda_1,M_1)}(x)\|_{2,H}\le\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2n}\|f^{(\Lambda,M)}(x+t)-f^{(\Lambda,M)}(x-t)\|dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi/n}\|f^{(\Lambda,M)}(x+\frac{t}{2})-f^{(\Lambda,M)}(x-\frac{t}{2})\|dt\le\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi/n}\omega(f^{(\Lambda,M)},t)dt.$$

Учитывая оценку для нормы функции f, получаем

$$\|f\|_{2,H}\le\frac{n}{4|\lambda_n|}\int_{0}^{\pi/n}\omega(f^{(\Lambda,M)},t)dt.$$

Точность этого неравенства будет следовать из теоремы 2.

Теорема 1 доказана.

Будем говорить, что элементы некоторой совокупности $\{g_k\} \subset L_2([0; 2\pi), H)$ являются слабо линейно зависимыми, если для любого ненулевого функционала $F \in H^* = H$ числовые функции $< F, g_k >$ являются линейно зависимыми. В противном случае элементы $\{g_k\}$ назовём слабо линейно независимыми. Будем считать, что подпространство $G \subset L_2([0; 2\pi), H)$ имеет слабую размерность n (и писать $w - \dim G = n$), если:

1) найдутся n элементов в G, которые слабо линейно независимы;

2) любые (n + 1) элементов из G слабо линейно зависимы.

Отметим, что $w - \dim T^H_{2n-1} = 2n - 1$.

Величину

$$d^w_{2n-1}(W^{\Lambda,M,n}_{2,H}, L_2([0; 2\pi), H)) = \inf_{w-\dim G \leq 2n-1} E_n(W^{\Lambda,M,n}_{2,H}, G)_{2,H}$$

назовем слабым (2n–1)-поперечником по Колмогорову класса $W^{\Lambda,M,n}_{2,H}$ в пространстве $L_2([0;2\pi), H)$.

Понятие слабого поперечника введено В.Ф. Бабенко и С.А. Пичуговым в [2] (см. также [1]).

Теорема 2. *Для любого $n = 1, 2, \ldots$*

$$d^w_{2n-1}(W^{\Lambda,M,n}_{2,H}, L_2([0; 2\pi), H)) = \frac{n}{4|\lambda_n|}. \tag{3}$$

Доказательство. Из теоремы 1 непосредственно следует, что

$$d^w_{2n-1}(W^{\Lambda,M,n}_{2,H}, L_2([0; 2\pi), H)) \leq \frac{n}{4|\lambda_n|}. \tag{4}$$

При оценке снизу будем использовать метод, основанный на использовании теоремы о поперечнике шара [7; 8]. Точнее, мы будем использовать обобщение этой теоремы на случай слабых поперечников, предложенное в [1]. Рассмотрим произвольный обобщенный полином

$$T^{(\Lambda,M)}_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k a_k \cos kt + \mu_k b_k \sin kt), \qquad (a_k, b_k \in H)$$

заданного порядка n и оценим $\omega(T^{(\Lambda,M)}_n, x)$ для $0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}$.

Имеем

$$\| T^{(\Lambda,M)}_n(t+x) - T^{(\Lambda,M)}_n(t) \|^2_{2,H} \leq$$

$$\pi \sum_{k=1}^{n}(\| a_k \|^2 + \| b_k \|^2) |\lambda_k|^2 \, 2(1 - \cos kx) \leq 4|\lambda_n|^2 \sin^2\frac{nx}{2} \, \| T_n \|^2_{2,H}.$$

Следовательно,

$$\omega(T_n^{(\Lambda,M)}, x) \le 2\,|\lambda_n|\,\sin\frac{nx}{2}\,\|T_n\|_{2,H}$$

и

$$\int_0^{\pi/n}\omega(T_n^{(\Lambda,M)}, x)dx \le \frac{4|\lambda_n|}{n}\,\|T_n\|_{2,H}\,. \qquad (5)$$

Далее рассмотрим шар слабой размерности 2n+1 в пространстве L_2 ([0; 2π), H)

$$S_{2n+1}^H = \left\{T_n(x) \in T_{2n-1}^H : \|T_n\|_{2,H} \le \frac{n}{4|\lambda_n|}\right\}.$$

В силу (5) ясно, что $S_{2n+1}^H \subset W_{2,H}^{\Lambda,M,n}$, и тогда по теореме о слабом поперечнике шара (см. [1])

$$d_{2n-1}^w\,(W_{2,H}^{\Lambda,M,n}, L_2([0;2\pi], H)) \ge d_{2n-1}^w\,(S_{2n+1}, L_2([0;2\pi), H)) = \frac{n}{4|\lambda_n|}$$

В сопоставлении с (3) получаем

$$d_{2n-1}^w\,(W_{2,H}^{\Lambda,M,n}, L_2([0;2\pi), H)) = \frac{n}{4|\lambda_n|} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 2 доказана.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** Теорема о поперечнике шара в пространствах отображений / В.Ф. Бабенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2009. – Вип. 14.– С.15 – 22.
2. **Бабенко В.Ф.** Аппроксимация непрерывных вектор-функций / В.Ф. Бабенко, С.А. Пичугов // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, № 11– С. 1435 – 1448.
3. **Дороговцев А.Я.** Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем / А.Я. Дороговцев – К., 1992, – 319 с.
4. **Иосида К.** Функциональный анализ /К. Иосида//– М., 1967, – 624 с.
5. **Колмогоров А.Н.** Uber die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen /А.Н. Колмогоров// Ann. of Math. – 1936. – 37 – С. 107 – 111.
6. **Люстерник Л.А.** Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, Л.А. Соболев //– М., 1982, – 271 с.
7. **Тайков Л. В.** Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 / Л.В. Тайков // Матем. заметки. – 1977. – 22, № 4 – С.535 – 542.
8. **Тихомиров В.М.** Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. / В.М. Тихомиров // Успехи матем. наук. – 1960. – 15, № 3 – С.81 – 120.

Надійшла до редколегії 06 .02 09

УДК 517.5

Е.А. Севостьянов
Институт прикладной математики и механики НАН Украины

О СВЯЗИ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНОГО ИСКАЖЕНИЯ С ИСКАЖЕНИЕМ ДЛИН В R^n

Досліджено відображення зі скінченим спотворенням R^n, $n \geq 2$. Доведено, що довільне відкрите дискретне відображення зі скінченим спотворенням за Іванцом, міра множини точок розгалуження якої дорівнює нулю, є відображення зі скінченим спотворенням довжини за умовою, що відповідна зовнішня ділатація $K_O(x, f) \leq K(x)$ майже скрізь, якщо $K(x) \in L_{loc}^{n-1}(D)$

Введение. Основной целью статьи является получение взаимосвязи между отображениями класса Соболева и отображениями конечного искажения длины. Такая взаимосвязь, по сути, была указана в [10], однако, доказательства приведено не было. Несколько позднее оно было получено в [2], однако, методология, посредством которой было проведено доказательство, весьма сложная, к тому же, судя по всему, многие результаты доказаны здесь с перегруженными априорными условиями, см. теорему 2.1, теорему 4.1 и следствие 4.1 там же. Доказательство, которое приведено ниже (теорема 1) базируется на методе известного математика Е.А. Полецкого, которое, по нашему мнению, вполне можно считать более простым и, в известном смысле, вполне отвечающим понятиям о математической строгости. Пусть D – область в R^n, $n \geq 2$. Отображение $f : D \to R^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in R^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в R^n. Всюду далее $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in R^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$, $\overline{R^n} = R^n \cup \{\infty\}$, $m(x)$ – мера Лебега в R^n, запись $f : D \to R^n$ предполагает, что отображение f непрерывно Мы также предполагаем, что отображение f сохраняет ориентацию, т. е., топологический индекс $\mu(y, f, G) > 0$ для произвольной области $G \subset D$, такой что $\overline{G} \subset D$ и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Через B_f, $B_f \subset D$, будет обозначаться *множество точек ветвления отображения* $f : D \to R^n$, т. е. $x_0 \in B_f$ тогда и только тогда, когда f не является локальным гомеоморфизмом ни в какой окрестности $U = B(x_0, \varepsilon)$ точки x_0. Для множества $A \subset R^n$ запись $|A|$ означает меру Лебега A в R^n, $\mathrm{mes}_1(A)$ означает лебегову меру (длину) множества $A \subset R$. Область $G \subset D$, такая что $\overline{G} \subset D$, называется *нормальной областью отображения* f, если $\partial fG = f\partial G$. Окрестность U точки $x_0 \in D$ называется *нормальной* *окрестностью отображения* f, если $x_0 \in U$ и U является нормальной областью f. Пусть $f: D \to R^n$ – открытое дискретное отображение, тогда каждая точка $x_0 \in D$ имеет нормальную окрестность U в D, см., напр , лемму 2.9 в [9] Пусть $f: D \to R^n$ – произвольное отображение и пусть существует область $G \subset D$ с $\overline{G} \subset D$, такая что $\overline{G} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Тогда величина $\mu(f(x), f, G)$, называемая *локальным топологическим индексом,* не зависит от области G и обозначается символом $i(x, f)$.

Пусть V – нормальная область в D, $y \in f(V)$, $\{x_k\} = f^{-1}(y) \cap V$, тогда функция $\mu(y, f, V) = \mu(f, V) = \sum\limits_k i(x_k, f)$ постоянна в $f(V)$ для произвольного открытого дискретного отображения $f: D \to R^n$, см. 2.1 и 2.4 в [9]

Напомним, что борелева функция $\rho: R^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в R^n, если $\int\limits_\gamma \rho(x) \; |dx| \;\geq\; 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$

В этом случае мы пишем $\rho \in adm\,\Gamma$.

Модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) \;=\; \inf_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_{R^n} \rho^n(x) \;\; dm(x).$$

Пусть $Q: D \to [1, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f: D \to \overline{R^n}$ является Q*-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\,\Gamma) \;\leq\; \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x) \;\; dm(x) \qquad (1)$$

для любого семейства Γ кривых γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in adm\,\Gamma$ [11]

Отметим, что оценки типа (1) в случае $Q(x) \equiv 1$ характеризуют конформные отображения, а при $Q(x) \leq q$–квазиконформные, см., напр., 8.1, 13.1 и 34.3 в [15]. В случае, когда непостоянное отображение f не является гомеоморфизмом, оценки вида (1) при ограниченной функции Q фактически являются частью определения квазирегулярных отображений (отображений с ограниченным искажением по терминологии Решетняка), см. [9; 14]. Для отображения $f: D \to R^n$, имеющего в D частные производные почти всюду (п. в.), пусть $f'(x)$ обозначает матрицу Якоби отображения f в точке x, $J(x, f)$ означает якобиан f в точке x, то есть $\det f'(x)$. Всюду далее

$$\| f'(x) \| = \max_{h\in R^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}, \qquad l(f'(x)) = \min_{h\in R^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Напомним, что *внутренняя дилатация* отображения f в точке x определяется как

$$K_I(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n},$$

если $J(x,f)\neq 0$, 1, если $f'(x)=0$, и ∞ в других случаях. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x определяется как отношение

$$K_0(x,f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|},$$

если $J(x,f)\neq 0$, 1, если $f'(x)=0$ и ∞ в остальных случаях. Напомним, что отображение $f: X\to X'$ между пространствами с мерой (X,Σ,μ) и (X',Σ',μ') имеет (N)*-свойство Лузина*, если $\mu'(f(S))=0$ как только $\mu(S)=0$ Аналогично, f имеет (N^{-1}) *-свойство*, если $\mu(S)=0$ как только $\mu'(f(S))=0$. Пусть $x\in E\subset R^n$, $\varphi: E\to R^n$. Положим

$$L(x,\varphi) = \limsup_{y\to x,\, y\in E} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}, \qquad l(x,\varphi) = \liminf_{y\to x,\, y\in E} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}.$$

Отображение $f: D\to R^n$, $n\geq 2$, называется отображением с *конечным метрическим искажением*, пишем $f\in FMD$, если оно имеет (N) – свойство Лузина и $0 < l(x,f) < L(x,f) < \infty$ для п. в. $x\in D$. Пусть $\Delta\subseteq R$ – открытый интервал числовой прямой, $\gamma:\Delta\to R^n$ – локально спрямляемая кривая. Тогда существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma:\Delta\to\Delta_\gamma\subseteq R^n$ с условием $l_\gamma(t_0)=0$, $t_0\in\Delta$, такая что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma|_{[t_0,t]}$ кривой γ, если $t>t_0$ и $-l(\gamma|_{[t_0,t]})$, если $t<t_0$, $t\in\Delta$. Пусть $g:|\gamma|\to R^n$ – непрерывное отображение, где $|\gamma|=\gamma(\Delta)\subseteq R^n$. Предположим, что кривая $\widetilde{\gamma}=g\circ\gamma$ также локально спрямляема. Тогда существует единственная не убывающая функция $L_{\gamma,g}:\Delta_\gamma\to\Delta_{\widetilde{\gamma}}$ такая, что $L_{\gamma,g}(l_\gamma(t)) = l_{\widetilde{\gamma}}(t) \quad \forall\ t\in\Delta$

Напомним, что кривая γ называется *поднятием кривой* $\widetilde{\gamma}\in R^n$ *при отображении* $f: D\to R^n$, если $\widetilde{\gamma} = f\circ\gamma$. Будем говорить, что отображение $f: D\to R^n$ имеет $L-$*свойство*, если выполнены следующие условия:

(L_1) для п. в. кривых $\gamma \in D$ кривая $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляемая и функция $L_{\gamma,f}$ имеет (N)-свойство;

(L_2) для п. в кривых $\widetilde{\gamma} \in f(D)$ каждое поднятие γ кривой $\widetilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma,f}$ имеет (N^{-1})-свойство.

По замечанию 4.1 в [10] из (L)-свойства следует *ACP-свойство*, т е абсолютная непрерывность функции $L_{\gamma,f}$ на всех замкнутых интервалах Δ_γ для п. в кривых γ в D. Будем говорить, что отображение $f:D \to R^n$ имеет *ACP^{-1}-свойство*, если функция $L_{\gamma,f}^{-1}$ абсолютно непрерывна на замкнутых подинтервалах $\Delta_{\widetilde{\gamma}}$ для п. в. кривых $\widetilde{\gamma}$ в $f(D)$ и для каждого поднятия γ кривой $\widetilde{\gamma}$.

Известно, что отображение $f:D \to R^n$ имеет (L)-свойство тогда и только тогда, когда $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, см. предложение 4.3 в [10].

Отображение $f:D \to R^n$, $n \geq 2$, называется отображением *с конечным искажением длины,* пишем $f \in FLD$, если $f \in FMD$ и f имеет (L)-свойство.

Класс отображений конечного искажения длины введён О Мартио, В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым в 2002 г. Согласно [10], произвольный гомеоморфизм класса $W^{1,n}_{loc}$ с $f^{-1} \in W^{1,n}_{loc}$ имеет конечное искажение длины Произвольное непостоянное квазирегулярное отображение также принадлежит классу FLD. Отметим, что отображения класса FLD являются Q-отображениями с $Q(x) = K_I(x,f)$, см. теорему 6.10 в [10].

Пусть E – множество в R^n и пусть $\gamma:\Delta \to R^n$ – некоторая кривая. Обозначим через $\gamma \cap E = \gamma(\Delta) \cap E$. Пусть γ – локально спрямляема. Тогда

$$l(\gamma \cap E) = \operatorname{mes}_1 E_\gamma,$$

где

$$E_\gamma = l_\gamma\left(\gamma^{-1}(E)\right).$$

Пусть $I = [a,b]$. Для заданной кривой $\gamma: I \to R^n$ определим функцию длины $S(t)$ по правилу $S(t) = S(\gamma, \gamma[a,t])$, где $S(\gamma, I)$ означает длину кривой $\gamma|_I$. Пусть $B \subset I$, тогда $S(\gamma(B))$ означает меру множества значений функции $S(t)$ на множестве B.

Отображение $f:D \to R^n$ называется *отображением конечного искажения по Иванцу,* если $f \in W^{1,n}_{loc}$ и существует функция $K(x):D \to [1,\infty)$ такая, что $\| f'(x) \|^n \leq K(x) \cdot J(x,f)$ при п. в. $x \in D$, см. [3], [4]. Последнее соотношение, очевидно, эквивалентно условию $K_O(x,f) \leq K(x)$ п. в.

Пусть $V \subset D$ – нормальная область и $f(V) = V^*$. Определим отображение $g_V : V^* \to R^n$ следующим образом: пусть $y \in V^*$, $f^{-1}(y) \cap V = \{x_i\}$, тогда

$$g_V(y) = \frac{1}{m} \sum_i i(x_i, f) x_i,$$

где $m = \sum_i i(x_i, f) = \mu(f, V)$.

Основной результат и следствия из него

Теорема 1. *Пусть $f : D \to R^n$ – открытое дискретное отображение конечного искажения по Иванцу, для которого $K(x) \in L_{loc}^{n-1}(D)$ и $|B_f| = 0$. Тогда f является отображением с конечным искажением длины.*

Доказательство. В основе метода доказательства лежит подход из [12], см. лемму 6. Поскольку отображение $f \in W_{loc}^{1,n}$ открыто в D, f дифференцируемо почти всюду в D, см. теорему 4 в [13, с331] и обладает (N)-свойством, [6], кроме того, f обладает (N^{-1}) - свойством, см. теорему 1.2 в [5]. По следствию 3.14 в [10], $f \in FMD$. Т. к. $f \in W_{loc}^{1,n}$, $f \in ACP$, см. п. 28 2 в [15]. Таким образом, согласно предложению 4.3 в [10], достаточно доказать, что $f \in ACP^{-1}$.

Перед тем, как непосредственно переходить к доказательству, сделаем несколько полезных замечаний. Пусть Γ – семейство кривых в D и $\Gamma_* = f(\Gamma)$. Не ограничивая общности, можно считать, что все кривые γ_* семейства Γ_* спрямляемы. Пусть s_* – натуральный параметр на γ_* и $\gamma_* = f(\gamma(t))$. Т. к. функция $s_*(t)$ строго монотонна и непрерывна, существует обратная функция $t(s_*)$, которая также строго монотонна и непрерывна. Таким образом, можно рассмотреть параметр s_* на γ. В дальнейшем, мы предполагаем, что все кривые семейств Γ и Γ_* параметризованы таким образом.

Пусть f удовлетворяет условиям теоремы 1, $\widetilde{\Gamma}$ – семейство кривых в D, $\widetilde{\Gamma}_* = f(\widetilde{\Gamma})$. Покажем, что $\gamma(s_*)$ абсолютно непрерывна для п. в. кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$, таких что $\gamma_* = f \circ \gamma$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\widetilde{\Gamma} \subset U'$, где U' – компактная подобласть области D.

Пусть $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ и I – отрезок, который является областью определения параметра s_*. Покажем, что для п. в. кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ кривая $\gamma(s_*)$ спрямляема на $I \setminus \gamma(B_f)$, где $\gamma(B_f) = \{ s_* : \gamma(s_*) \in B_f \}$.

Покроем множество $U' \setminus B_f$ счётной системой окрестностей $\{U_l\}$, в каждой из которых отображение $f_l = f|_{U_l}$ гомеоморфно. Пусть $h_l = f_l^{-1}$. Поскольку $K(x) \in L_{loc}^{n-1}(D)$, $h_l = (h_{l1}, \ldots, h_{ln}) \in W_{loc}^{1,n}$, см. [1], и, следовательно, $h_l \in ACP$, см. п. 28.2 в [15]. Заметим, что если $\gamma(s_*) \in U_l \cap U_j$, то $h_l(\gamma_*(s_*)) = h_j(\gamma_*(s_*))$. Поскольку кривая γ параметризована натуральным параметром s_* кривой γ_*, сделанное замечание позволяет определить отображение $g : \gamma_*|_{I \setminus \gamma(B_f)} \to R^n$ такое, что если $\gamma(s_*) \in U_k$, то $g(\gamma_*(s_*)) = h_k(\gamma_*(s_*))$. По теореме 4 в [13 с. 331], каждый гомеоморфизм класса $W_{loc}^{1,n}$ дифференцируем п. в. и, следовательно, h_l дифференцируемо п. в. в $f_l(D)$. Пусть B^* – множество, где полный дифференциал h_l не существует хотя бы для одного l. Тогда множество B^* борелево и $|B^*| = 0$. По теореме 33.1 в [15] $l(\gamma_* \cap B^*) = 0$ для п. в. кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$. Следовательно, $\gamma'(s_*)$ существует для п.в. s_* и для п. в. кривых $\gamma_* = f \circ \gamma \in \widetilde{\Gamma}_*$. Положим

$$\frac{\partial g_l}{\partial y_j}(s_*) = \frac{\partial h_{kl}}{\partial y_j}(\gamma_*(s_*)).$$

Имеем

$$S(\gamma, I \setminus B_f) = \int\limits_{I \setminus \gamma(B_f)} |\gamma'(s_*)|\, ds_* = \int\limits_{I \setminus \gamma(B_f)} \left(\sum_{l,j} \left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j}(s_*) \right)^2 \right)^{1/2} ds_*$$

для п. в. кривых $\gamma_* = f \circ \gamma \in \widetilde{\Gamma}_*$. Заметим, что для п. в. кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$

$\int\limits_{I \setminus \gamma(B_f)} \left(\sum_{l,j} \left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j} \right)^2 \right)^{1/2} ds_* < \infty$, поскольку $h_l \in W_{loc}^{1,n}$ и $|U'| < \infty$. Следовательно, для п. в. кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ кривая γ спрямляема на $I \setminus \gamma(B_f)$. Более того, $S(\gamma, C) = 0$ для любого множества $C \subset I \setminus \gamma(B_f)$, такого что $\mathrm{mes}_1(C) = 0$. Действительно,

$$S(\gamma, C) = \int\limits_C |\gamma'(s_*)|\, ds_* = 0$$

для п. в. кривых $\gamma_* = f \circ \gamma \in \widetilde{\Gamma}_*$. Пусть B_l – множество точек ветвления x таких что $i(x, f) = l$ и $\gamma(B_l) = \{ s_* : \gamma(s_*) \in B_l \}$. Покажем, что для п. в. кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ кривая $\gamma(s_*)$ спрямляема на $I \setminus \bigcup\limits_{k > l} \gamma(B_k)$, $l \geq 1$, и $S(\gamma, C) = 0$ для любого множества $C \subset I \setminus \bigcup\limits_{k > l} \gamma(B_k)$, такого что $\mathrm{mes}_1(C) = 0$.

Доказательство проведём индукцией по l. При $l=1$ утверждение доказано. Предположим, что оно остаётся справедливым для $l=j-1$. Покажем его справедливость для $l=j$. Поскольку по предположению $|B_f|=0$, по (N) - свойству также $|f(B_f)|=0$. По теореме 33.1 в [15] $\mathrm{mes}_1(\gamma(B_f))=l(\gamma_*\cap f(B_f))=0$ для п. в. кривых $\gamma_*\in\tilde{\Gamma}_*$ и всех кривых γ таких, что $\gamma_*=f\circ\gamma$. Следовательно, не ограничивая общности можно считать, что $\mathrm{mes}_1(\gamma(B_f))=0$. Покроем B_j счётной системой нормальных областей $\{U_l\}$ таких, что $\mu(f,U_l)=j$, $\mu(f,U_l)=\sum\limits_{x_l\in U_l} i(x_l,f)$. Отображение $g_l=g_{f(U_l)}$ абсолютно непрерывно на п. в. кривых из $U_l^*=f(U_l)$, см. теорему 2.1 в [2]. Пусть $\gamma_*(s_*)\in f(B_j\cap U_l)$, тогда имеем $g_l(\gamma_*(s_*))=\gamma(s_*)$. Таким образом, $g_l^{-1}\gamma_*$ состоит из не более, чем счётного числа кривых в U_l, каждая из которых в точках B_f совпадает с γ, см. лемму 4 в [12]. Тогда, поскольку $g_l\in ACP$ в U_l^*, по лемме 1 в [12], $S(\gamma,\gamma(B_j\cap U_l))=0$ для п.в. кривых $\gamma_*\in\tilde{\Gamma}_*$ и всех кривых γ таких, что $\gamma_*=f\circ\gamma$. Тогда $S(\gamma,\gamma(B_j))=0$ для п.в. кривых $\gamma_*\in\tilde{\Gamma}_*$ и всех кривых γ таких, что $\gamma_*=f\circ\gamma$. Полагая в лемме 2 в [12] $B:=\bigcup\limits_{k>j}\gamma(B_k)$ и $E:=\gamma(B_j)$ и используя предположение индукции, получаем что кривая γ спрямляема на $I\setminus\bigcup\limits_{k>j}\gamma(B_k)$ и $S(\gamma,C)=0$ для любого множества $C\subset I\setminus\bigcup\limits_{k>j}\gamma(B_k)$, такого что $\mathrm{mes}_1(C)=0$. Поскольку $\overline{U'}\subset D$, найдётся $M\in\mathrm{N}$, такое что $i(x,f)\le M$. Тогда по доказанному $S\left(\gamma,\bigcup\limits_{j=2}^{M}\gamma(B_j)\right)=0$ для п. в. кривых $\gamma_*\in\tilde{\Gamma}_*$. По лемме 3 в [12] мы получаем, что кривая $\gamma(s_*)$ абсолютно непрерывна и спрямляема для п. в. кривых $\gamma_*\in\tilde{\Gamma}_*$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $f:D\to R^n$ – отображение конечного искажения по Иванцу, для которого $K(x)\in L^p_{loc}(D)$ с $p>n-1$ и $|B_f|=0$. Тогда f является отображением с конечным искажением длины.

Доказательство напрямую следует из того, что при указанных условиях на $K(x)$ отображение f открыто и дискретно, [7; 8], и теоремы 1.

Следствие 2. Пусть $f:D\to R^n$ – открытое дискретное отображение конечного искажения по Иванцу, для которого $K(x)\in L_{loc}^{n-1}(D)$ и $|B_f|=0$. Тогда f является Q-отображением с $Q(x)=K_I(x,f)$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 6.10 в [10] и теоремы 1.

Библиографические ссылки

1. **Heinonen J. and Koskela P.** Sobolev mappings with integrable dilatations // Arch. Rational Mech. Anal. – 1993. – P. 81–97.

2. **Koskela P. and Onninen J.** Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities // J. Reine Angew. Math. – 2006. – 599. – P. 1–26.

3. **Iwaniec T. and Martin G.** Geometric Function Theory and Non–linear Analysis. – Clarendon Press: Oxford, 2001.

4. **Iwaniec T. and Sverak V.** On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – 118. – P. 181–188.

5. **Koskela P., Maly J.**, Mappings of finite distortion: The zero set of Jacobian // J. Eur. Math. Soc. – 2003. –5, № 2 . – P. 95–105.

6. **Maly J. and Martio O.** Lusin's condition (N) and mappings of the class $W_{loc}^{1,n}$ // J. Reine Angew. Math. –.1995. – 458. – P. 19–36.

7. **Manfredi J.J. and Villamor E.** Mappings with integrable dilatation in higher dimensions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1995. – 32, № 2. – P. 235–240.

8. **Manfredi J.J. and Villamor E.** An extension of Reshetnyak's theorem // Indiana Univ. Math. J. – 1998. – 47, № 3. – P. 1131–1145.

9 **Martio O., Rickman S. and Väisälä J.** Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. –448. – P. 1–40

10. **Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.** Mappings with finite length distortion // J D. Anal. Math. – 2004. – 93. – P. 215–236.

11 **Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.** On Q–homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. – 2005. – 30, № 1. – P. 49–69.

12. **Полецкий Е.А.**, Метод модулей для негомеоморфных квазиконфомных отображений /Е.А. Полецкий// Матем. сб. – 1970. – 83, № 2. – С. 261–272.

13. **Решетняк Ю.Г.** Обобщённые производные и дифференцируемость почти всюду / Ю.Г. Решетняк // Матем. сб. – 1968. – 75. – С. 323 – 334.

14. **Решетняк Ю.Г.** Пространственные отображения с ограниченным искажением / Ю.Г Решетняк – Новосибирск, 1982, 574 с.

15. **Väisälä J.** Lectures on n–Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math. 229. – Berlin etc.. Springer–Verlag, 1971.

Надійшла до редколегії 07 11.08

УДК 517.5

Д.С. Скороходов

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

О ЗАДАЧЕ ЛАНДАУ-КОЛМОГОРОВА НА ОТРЕЗКЕ ДЛЯ АБСОЛЮТНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Для класу функцій, абсолютно монотонних на відрізку, розв'язані задачі Ландау-Колмогорова та Колмогорова для трьох чисел.

Пусть $[a,b]$ – конечный отрезок числовой прямой R. Через $L_p := L_p[a,b]$, $1 \le p \le \infty$, обозначим пространство функций $f:[a,b] \to R$ с обычной нормой

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, & \text{если} \quad 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in [a,b]\}, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in N$ положим $L_p^r := L_p^r[a,b]$ – пространство функций f таких, что существует и абсолютно непрерывна на $[a,b]$ производная $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} := f$), и $f^{(r)} \in L_p$. Пусть $1 \le q,s \le \infty$ и $k \in N$, $1 \le k \le r-1$. Задача Ландау-Колмогорова на отрезке $[a,b]$ может быть сформулирована в одной из следующих двух постановок.

Задача 1. Для любого $\delta > 0$ найти величину

$$\omega_{p,q,s}^{k,r}\left(\delta; L_s^r\right) := \sup\left\{\left\|f^{(k)}\right\|_q : f \in L_s^r, \|f\|_p \le \delta, \left\|f^{(r)}\right\|_s \le 1\right\},$$

которая называется модулем непрерывности оператора дифференцирования k-го порядка.

Задача 2. Найти все пары положительных чисел (A,B) таких, что:

1) для любой функции $f \in L_s^r$ имеет место неравенство

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \le A\|f\|_p + B\left\|f^{(r)}\right\|_s; \tag{1}$$

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in L_s^r$, для которой

$$\left\|f_\varepsilon^{(k)}\right\|_q > A\|f_\varepsilon\|_p + (B-\varepsilon)\left\|f_\varepsilon^{(r)}\right\|_s.$$

Отметим, что задачи 1 и 2 тесно взаимосвязаны [1, §1.7]. Так, зная полное решение задачи 1, мы сможем получить все возможные пары чисел (A,B), для которых неравенство (1) выполнено для любой функции $f \in L_s^r$. С другой стороны, зная полное решение задачи 2, мы сможем получить оценку сверху для модуля непрерывности оператора дифференцирования k-го порядка.

Частные решения задачи Ландау-Колмогорова на отрезке (т. е. случаи, когда найден модуль непрерывности $\omega_{p,q,s}^{k,r}$, либо найдены все пары чисел (A,B), удовлетворяющие неравенству (1)) известны в следующих ситуациях.

1) $p=q=s=\infty$:

а) $r=2$ – Э. Ландау [9] (задача 2), К. Чуи, П. Смит [8] (задача 1);

б) $r=3$ – А.И. Звягинцев, А. Лепин [3] и М. Сато [10] (задача 1).

2) $p=s=\infty$ и $1 \le q \le \infty$: $r \le 3$ – Б. Боянов, Н. Найденов [7] (задача 1).

3) $p=q=\infty$ и $1 \le s \le \infty$: $r=2$ – Ю.В. Бабенко [2] (задача 2).

Задачу Ландау-Колмогорова имеет смысл рассматривать и на более узких классах функций, например, на классах абсолютно монотонных на отрезке функций. В данной работе мы получим полное решение задач 1 и 2 для класса абсолютно монотонных на отрезке функций при всех $p,q,s \in \{1,\infty\}$ и $1+1/q-1/p \le k \le r-1+1/q-1/s$ (здесь мы полагаем, что $1/w=0$, если $w=\infty$) и применим полученные результаты к решению задачи Колмогорова для трех чисел. Будем исходить из следующего определения абсолютно монотонной на отрезке функции, которое дал С.Н. Бернштейн [6; 11, с. 144].

Определение 1. Функция f называется абсолютно монотонной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна на нем и на интервале (a,b) существуют и неотрицательны производные всех порядков, т. е. $f^{(k)}(x) \ge 0$ для всех $k \in Z_+$ и $a<x<b$.

Через $AM:=AM[a,b]$ обозначим класс абсолютно монотонных на отрезке $[a,b]$ функций. Для $x \in [a,b]$ и $m \in Z_+$ положим $e_m(x):=(x-a)^m$. Пусть $k,r \in N$, $k \le r$, и $p,q,s \in \{1,\infty\}$. Для всех $m \ge r$ определим

$$\sigma_{p,q,s}^{k,r}(m):=\left[\frac{\left\|e_m^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_m^{(r)}\right\|_s}-\frac{\left\|e_{m+1}^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_{m+1}^{(r)}\right\|_s}\right]\cdot\left[\frac{\left\|e_m\right\|_p}{\left\|e_m^{(r)}\right\|_s}-\frac{\left\|e_{m+1}\right\|_p}{\left\|e_{m+1}^{(r)}\right\|_s}\right]^{-1} \quad \text{и} \quad \tau_{p,s}^{r}(m):=\left\|e_m\right\|_p\left\|e_m^{(r)}\right\|_s^{-1}.$$

Пусть также $\sigma_{p,q,s}^{k,r}(r-1):=\left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q\left\|e_{r-1}\right\|_p^{-1}$.

Лемма 1. Пусть $p,q,s\in\{1,\infty\}$ и $k,r\in N$, $1+1/q-1/p\le k\le r-1+1/q-1/s$. Тогда для любого $m\ge r$ справедливы неравенства:

$$\sigma^{k,r}_{p,q,s}(m-1)\le\sigma^{k,r}_{p,q,s}(m) \qquad \text{и} \qquad \tau^{r}_{p,s}(m+1)\le\tau^{r}_{p,s}(m). \tag{2}$$

Доказательство. Несложно убедиться в том, что для любого $m\ge r$ имеют место равенства.

$$\sigma^{k,r}_{p,q,s}(m)=\frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}\,\frac{(m+1+1/p)!}{(m+1-k+1/q)!}\,(b-a)^{k+1/p-1/q},$$

$$\tau^{r}_{p,s}(m)=\frac{(m-r+1/s)!}{(m+1/p)!}(b-a)^{r+1/p-1/s}.$$

Из последних соотношений, при выполнении условий леммы, легко установить, что для всех $m\ge r$:

$$\sigma^{k,r}_{p,q,s}(m)\le\sigma^{k,r}_{p,q,s}(m+1) \qquad \text{и} \qquad \tau^{r}_{p,s}(m+1)\le\tau^{r}_{p,s}(m)$$

Для окончательного доказательства неравенств (2) остается лишь проверить выполнение неравенства $\sigma^{k,r}_{p,q,s}(r-1)\le\sigma^{k,r}_{p,q,s}(r)$, которое может быть установлено непосредственно.

Ввиду леммы 1, имеет смысл при $m\ge r$ говорить об отрезках

$$I^{k,r}_{p,q,s}(m):=\left[\sigma^{k,r}_{p,q,s}(m-1),\sigma^{k,r}_{p,q,s}(m)\right] \text{ и } \Delta^{r}_{p,s}(m):=\left[\tau^{r}_{p,s}(m+1),\tau^{r}_{p,s}(m)\right].$$

Определим также $\Delta^{r}_{p,s}(r-1):=\left[\tau^{r}_{p,s}(r),\infty\right)$. Наконец, для любого $A\in I^{k,r}_{p,q,s}(m)$, $m\ge r$, положим

$$B^{k,r}_{p,q,s}(A):=\left(\left\|e^{(k)}_{m}\right\|_q-A\left\|e_m\right\|_p\right)\left\|e^{(r)}_{m}\right\|_s^{-1} \tag{3}$$

Решение задач 1 и 2 на классе AM дается следующими утверждениями.

Теорема 1. *Пусть* $p,q,s\in\{1,\infty\}$ *и* $k,r\in N$, $1+1/q-1/p\le k\le r-1+1/q-1/s$. *Тогда, для* $m\ge r-1$ *и* $\delta\in\Delta^{r}_{p,s}(m)$ *верно соотношение*

$$\omega^{k,r}_{p,q,s}(\delta)=\omega^{k,r}_{p,q,s}(\delta;AM)=\left\|e^{(k)}_{m+1}\right\|_q\left\|e^{(r)}_{m+1}\right\|_s^{-1}+\left(\delta-\tau^{r}_{p,s}(m+1)\right)\sigma^{k,r}_{p,q,s}(m).$$

Теорема 2. *Пусть* $p,q,s\in\{1,\infty\}$ *и* $k,r\in N$, $1+1/q-1/p\le k\le r-1+1/q-1/s$. *Тогда для любых* $A\ge\sigma^{k,r}_{p,q,s}(r-1)$ *и* $f\in AM$ *имеет место точное неравенство*

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q\le A\left\|f\right\|_p+B^{k,r}_{p,q,s}(A)\left\|f^{(r)}\right\|_s \tag{4}$$

Более того, если $m\ge r$ *и* $A\in I^{k,r}_{p,q,s}(m)$, *то функция* $e_m(x)$ *обращает (4) в равенство.*

Замечание 1. Неравенство (4) может быть переписано и в следующем, более явном виде. Для любой функции $f \in AM$ и любого $A_1 \ge \dfrac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!}$ имеет место точное неравенство:

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \le A_1 (b-a)^{k-1/p+1/q}\|f\|_p + B(A_1)(b-a)^{r-k-1/s+1/q}\left\|f^{(r)}\right\|_s,$$

где $B(A_1) := \left(\dfrac{m!}{(m-k+1/q)!} - \dfrac{A_1}{(mp+1)^{1/p}}\right)\dfrac{(m-r+1/s)!}{m!}$, в случае, когда

$$\frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}\cdot\frac{(m+1/p)!}{(m-k+1/q)!} \le A_1 \le \frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}\cdot\frac{(m+1+1/p)!}{(m+1-k+1/q)!},\ m \ge r+1$$

и $B(A_1) := \left(\dfrac{1}{(r-k+1/q)!} - \dfrac{A_1}{(r+1/p)!}\right)$ при остальных значениях A_1

В качестве приложения теоремы 1, мы решим задачу Колмогорова для трех чисел на классе AM, которую рассмотрим в следующей постановке. Найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять положительные числа $M_{0,p}$, $M_{k,q}$ и $M_{r,s}$ для того, чтобы существовала функция $f \in AM$ такая, что $\|f\|_p = M_{0,p}$, $\left\|f^{(k)}\right\|_q = M_{k,q}$ и $\left\|f^{(r)}\right\|_s = M_{r,s}$.

Теорема 3. *Пусть* $p,q,s \in \{1,\infty\}$ *и* $k,r \in N$, $1+1/q-1/p \le k \le r-1+1/q-1/s$. *Тогда для трех положительных чисел* $M_{0,p}$, $M_{k,q}$ *и* $M_{r,s}$ *существует функция* $f \in AM$ *такая, что*

$$\|f\|_p = M_{0,p}, \qquad \left\|f^{(k)}\right\|_q = M_{k,q} \qquad \text{и} \qquad \left\|f^{(r)}\right\|_s = M_{r,s}$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{M_{k,q}}{M_{r,s}} \le \omega^{k,r}_{p,q,s}\left(\frac{M_{0,p}}{M_{r,s}}; AM\right) \tag{5}$$

Прежде, чем перейти к доказательству основных результатов, рассмотрим несколько вспомогательных утверждений. Нам понадобится следующее фундаментальное свойство абсолютно монотонных на отрезке функций, доказанное С.Н. Бернштейном [6; 5, гл. VIII, теорема 8.2].

Предложение 1. Если $f \in AM$, то для любого $x \in [a,b]$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (x-a)^n, \text{ где } f_n \ge 0 \text{ для всех } n \in \mathbf{Z}_+.$$

Далее, через $P_+^m := P_+^m[a,b]$, $m \in N$, обозначим множество всех алгебраических полиномов с положительными коэффициентами степени не выше m. Докажем следующее утверждение, представляющее собой неравенство типа Маркова-Бернштейна-Никольского [4, гл.4].

Лемма 2. Пусть $p,q \in \{1,\infty\}$ и $k,m \in N$, $1+1/q-1/p \le k \le m$. Тогда для любого $f \in P_+^m$ имеет место точное неравенство

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \le \left\|e_m^{(k)}\right\|_q \left\|e_m\right\|_p^{-1} \left\|f\right\|_p = \frac{(m+1/p)!}{(m-k+1/q)!}(b-a)^{-k+1/q-1/p}\left\|f\right\|_p. \qquad (6)$$

Доказательство. Любой полином $f \in P_+^m$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} f_n e_n(x). \qquad (7)$$

где $f_n \ge 0$, $n = \overline{0,m}$. Заметим, что для любых двух функций $g,h \in AM$, функция $g+h$ также абсолютно монотонна на отрезке $[a,b]$, и

$$\left\|g+h\right\|_\infty = g(b)+h(b) = \left\|g\right\|_\infty + \left\|h\right\|_\infty. \qquad (8)$$

Более того, в силу неотрицательности функций g и h на $[a,b]$ получим:

$$\left\|g+h\right\|_1 = \int_a^b (g(t)+h(t))dt = \left\|g\right\|_1 + \left\|h\right\|_1. \qquad (9)$$

Учитывая соотношения (7) - (9), будем иметь

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q = \left\|\sum_{n=0}^{m} f_n e_n^{(k)}\right\|_q = \sum_{n=0}^{m} f_n \left\|e_n^{(k)}\right\|_q =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_n\right\|_p} f_n \left\|e_n\right\|_p \le \max_{n=\overline{0,m}} \frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_n\right\|_p} \sum_{n=0}^{m} f_n \left\|e_n\right\|_p \le \max_{n=\overline{0,m}} \frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_n\right\|_p} \left\|f\right\|_p. \qquad (10)$$

Покажем теперь, что

$$\max_{n=\overline{0,m}} \frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_n\right\|_p} = \frac{\left\|e_m^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_m\right\|_p}. \qquad (11)$$

Действительно, несложно проверить, что

$$\frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_n\right\|_p} = \frac{(n+1/p)!}{(n-k+1/q)!}(b-a)^{k-1/q+1/p}, \qquad n = \overline{0,m}.$$

Из последнего соотношения вытекает справедливость (11). А тогда, из неравенства (10) и соотношения (11) вытекает требуемое неравенство (6).

Лемма 2 позволяет нам сделать следующий вывод. Если неравенство (1) при некоторых числах $A,B > 0$ имеет место для любой $f \in AM$, то

$$A \geq \sigma_{p,q,s}^{k,r}(r-1) = \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}. \qquad (12)$$

Более того, если выполнено (12), то существует $B > 0$ такое, что неравенство вида (1) справедливо для всех $f \in AM$ [1, с. 210].

Для $n \in N$, $n \geq r$, и $A > 0$ положим

$$B_{p,q,s}^{k,r}(A;n) = \left(\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\|e_n\|_p\right)\left\|e_n^{(r)}\right\|_s^{-1}.$$

Лемма 3. Пусть $p,q,s \in \{1,\infty\}$ и $k,r \in N$, $1+1/q-1/p \leq k \leq r-1+1/q-1/s$ Тогда для любого $A \geq \sigma_{p,q,s}^{k,r}(r-1)$

$$B_{p,q,s}^{k,r}(A) = \sup_{n \geq r} B_{p,q,s}^{k,r}(A;n),$$

где $B_{p,q,s}^{k,r}(A)$ определено соотношением (3).

Доказательство. Пусть $n \geq r$. Если $A \geq \sigma_{p,q,s}^{k,r}(n)$, то мы получим

$$B_{p,q,s}^{k,r}(A;n) \leq B_{p,q,s}^{k,r}(A;n+1).$$

Если же $A \leq \sigma_{p,q,s}^{k,r}(n)$, то будем иметь

$$B_{p,q,s}^{k,r}(A;n) \geq B_{p,q,s}^{k,r}(A;n+1).$$

Следовательно, когда $A \in I_{p,q,s}^{k,r}(m)$, $m \geq r$, то

$$B_{p,q,s}^{k,r}(A) = \sup_{n \geq r} B_{p,q,s}^{k,r}(A;n).$$

Теперь мы готовы доказать теорему 2, основываясь на которую докажем теорему 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in AM$. Тогда, ввиду предложения 1,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (x-a)^n,$$

где $f_n \geq 0$ для всех $n \in Z_+$. В силу соотношений (8) и (9) несложно видеть, что

$$\|f\|_p = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \|e_n\|_p, \qquad \left\|f^{(k)}\right\|_q = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left\|e_n^{(k)}\right\|_q \qquad \text{и} \qquad \left\|f^{(r)}\right\|_s = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left\|e_n^{(r)}\right\|_s.$$

Последние соотношения вместе с леммами 2 и 3 позволяют нам установить, что для любого $A \geq \sigma_{p,q,s}^{k,r}(r-1)$

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left\|e_n^{(k)}\right\|_q = \sum_{n=0}^{r-1} f_n \left\|e_n^{(k)}\right\|_q + \sum_{n=r}^{\infty} f_n \left\|e_n^{(k)}\right\|_q =$$

$$= \left\|\sum_{n=0}^{r-1} f_n e_n^{(k)}\right\|_q + \sum_{n=r}^{\infty} f_n \left\|e_n^{(k)}\right\|_q \leq \sigma_{p,q,s}^{k,r}(r-1)\left\|\sum_{n=0}^{r-1} f_n e_n\right\|_p +$$

$$+\sum_{n\ r}^{\infty} f_n\left(A\|e_n\|_p+B^{k,r}_{p,q,s}(A;n)\left\|e_n^{(r)}\right\|_s\right)\le A\|f\|_p+B^{k,r}_{p,q,s}(A)\left\|f^{(r)}\right\|_s .$$

Отметим, что неравенство (4) обращается в равенство для полинома $e_m(x)$, $m\ge r$, если $A\in I^{k,r}_{p,q,s}(m)$. □

Приступим теперь к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что для любого $\delta>0$

$$\omega^{k,r}_{p,q,s}(\delta;AM)\le \inf_{A>\sigma^{k,r}_{p,q,s}(r-1)}\left[A\delta+B^{k,r}_{p,q,s}(A)\right]=:g(\delta).$$

Положим $g(A;\delta):=A\delta+B^{k,r}_{p,q,s}(A)$, и вычислим $g(\delta)$. Несложно убедиться в том, что для любых $m\ge r$ и $A\in I^{k,r}_{p,q,s}(m)$ справедливо равенство

$$g(A;\delta)=\frac{\left\|e_m^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_m^{(r)}\right\|_s}+\left(\delta-\frac{\|e_m\|_p}{\left\|e_m^{(r)}\right\|_s}\right)A=\frac{\left\|e_m^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_m^{(r)}\right\|_s}+\left(\delta-\tau^r_{p,s}(m)\right)A . \qquad (13)$$

Легко проверить, что $g(A;\delta)$ для фиксированного $\delta>0$ является непрерывной при $A\ge\sigma^{k,r}_{p,q,s}(r-1)$. Пусть $\delta\in\Delta^r_{p,s}(n)$, $n\ge r-1$. Тогда для всех $r\le m\le n$ из (13) и леммы 1 следует, что $g(A;\delta)$ убывает по A. Поэтому, для любого $A\in\bigcup\left\{I^{k,r}_{p,q,s}(m):r\le m\le n\right\}$,

$$g(A;\delta)\ge g\left(\sigma^{k,r}_{p,q,s}(n);\delta\right).$$

Аналогично устанавливается, что для всех $m\ge n+1$ функция $g(A;\delta)$ возрастает по A. Следовательно, для любого $A\in\bigcup\left\{I^{k,r}_{p,q,s}(m):m\ge n+1\right\}$,

$$g\left(\sigma^{k,r}_{p,q,s}(n);\delta\right)\le g(A;\delta).$$

Таким образом, для любого $\delta\in\Delta^r_{p,s}(n)$, $n\ge r-1$,

$$g(\delta)=g\left(\sigma^{k,r}_{p,q,s}(n);\delta\right), \qquad (14)$$

Покажем теперь, что $\omega^{k,r}_{p,q,s}\equiv g$. Пусть сначала $\delta\in\Delta^r_{p,s}(n)$, $n\ge r$. Для $x\in[a,b]$ и $\lambda\in[0,1]$ рассмотрим функцию

$$f_\lambda(x)=\frac{\lambda(x-a)^n}{\left\|e_n^{(r)}\right\|_s}+\frac{(1-\lambda)(x-a)^{n+1}}{\left\|e_{n+1}^{(r)}\right\|_s}.$$

Очевидно, что $\left\|f_\lambda^{(r)}\right\|_s=1$. Более того,

$$\|f_\lambda\|_p=\lambda\tau^r_{p,s}(n)+(1-\lambda)\tau^r_{p,s}(n+1)\in\Delta^r_{p,s}(n). \qquad (15)$$

Для $\delta \in \Delta^r_{p,s}(n)$ выберем $\lambda \in [0,1]$ такое, что $\|f_\lambda\|_p = \delta$ (возможность этого выбора следует из (15)). Покажем теперь, что $\left\|f_\lambda^{(r)}\right\|_q = g(\delta)$. Действительно, из соотношений (14) и (13) будем иметь

$$g(\delta) = g\left(\sigma^{k,r}_{p,q,s}(n);\delta\right) = \frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_n^{(r)}\right\|_s} + \left(\delta - \tau^r_{p,s}(n)\right)\sigma^{k,r}_{p,q,s}(n) =$$

$$= \frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_n^{(r)}\right\|_s} + (1-\lambda)\left(\tau^r_{p,s}(n+1) - \tau^r_{p,s}(n)\right)\sigma^{k,r}_{p,q,s}(n) =$$

$$= \frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_n^{(r)}\right\|_s} + (1-\lambda)\left(\frac{\left\|e_{n+1}^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_{n+1}^{(r)}\right\|_s} - \frac{\left\|e_n^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_n^{(r)}\right\|_s}\right) = \frac{\lambda\left\|e_n^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_n^{(r)}\right\|_s} + \frac{(1-\lambda)\left\|e_{n+1}^{(k)}\right\|_q}{\left\|e_{n+1}^{(r)}\right\|_s} = \left\|f_\lambda^{(k)}\right\|_q.$$

Осталось только убедиться в том, что $\omega^{k,r}_{p,q,s}(\delta;AM) = g(\delta)$ для всех $\delta \in \Delta^r_{p,s}(r-1)$. Рассмотрим для $x \subset [a,b]$ и $\lambda \geq 0$ функцию

$$v_\lambda(x) = \lambda(x-a)^{r-1} + \frac{(x-a)^r}{\left\|e_r^{(r)}\right\|_s}$$

Тогда, $\left\|v_\lambda^{(r)}\right\|_s = 1$ и

$$\|v_\lambda\|_p = \lambda\|e_{r-1}\|_p + \tau^r_{p,s}(r) \geq \tau^r_{p,s}(r). \tag{16}$$

Для любого $\delta \geq \tau^r_{p,s}(r)$ выберем $\lambda \geq 0$ такое, что $\|v_\lambda\|_p = \delta$ (возможность этого выбора следует из (16)). А тогда, аналогично тому, как это было сделано для функции $g(\delta)$, получим, что $\left\|v_\lambda^{(k)}\right\|_q = g(\delta)$. Таким образом, мы показали, что $\omega^{k,r}_{p,q,s} \equiv g$, что и требовалось.

Доказательство теоремы 3. Необходимость условия (5) немедленно следует из теоремы 1. Покажем теперь достаточность условия (5). Действительно, пусть положительные числа $M_{0,p}$, $M_{k,q}$ и $M_{r,s}$ таковы, что

$$\frac{M_{k,q}}{M_{r,s}} \leq \omega^{k,r}_{p,q,s}\left(\frac{M_{0,p}}{M_{r,s}};AM\right).$$

Функция $\omega^{k,r}_{p,q,s}(\delta;AM)$ возрастает и непрерывна на $(0,\infty)$. Следовательно, найдется δ_0 такое, что $0 < \delta_0 \leq \frac{M_{0,p}}{M_{r,s}}$ и $\omega^{k,r}_{p,q,s}(\delta_0;AM) = \frac{M_{k,q}}{M_{r,s}}$. Поэтому, существует функция $f_0 \in AM$, для которой $\|f_0\|_p = \delta_0$, $\left\|f_0^{(k)}\right\|_s = \frac{M_{k,q}}{M_{r,s}}$ и $\left\|f_0^{(r)}\right\|_s = 1$. А тогда функция $g(x) = \left(M_{0,p} - M_{r,s}\delta_0\right) + M_{r,s}f_0(x) \in AM$ абсолютно монотонна на отрезке $[a,b]$, и удовлетворяет равенствам:

$$\|g\|_p = M_{0,p}, \qquad \left\|g^{(k)}\right\|_s = M_{k,q} \qquad \text{и} \qquad \left\|g^{(r)}\right\|_s = M_{r,s}. \ \square$$

Автор благодарит своего научного руководителя профессора В.Ф. Бабенко за постановку задачи и полезные обсуждения.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения/ В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов // – К., 2003. – 592 с.
2. **Бабенко Ю.В.** Точні нерівності типу Ландау для функцій з другими похідними з просторів Орлича / Ю.В. Бабенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2000. – вип. 5. – С. 18–22.
3. **Звягинцев А.И.** О неравенствах Колмогорова между верхними границами производных функций для $n = 3$ / А.И. Звягинцев, А. Лепин // Латв. Мат. Ежегодник. – 1985. – 26. – С. 176–181.
4. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные свойства полиномов и сплайнов / Н.П. Корнейчук, В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун – К., 1992. – 304 с.
5. **Крейн М.Г.** Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман – М., 1973, – 551 с.
6. **Bernstein S.N.** Sur les fonctions absolument monotones // Acta Math. – 1928. – 52. – P. 1–66.
7. **Bojanov B.** Examples of Landau-Kolmogorov inequality in integral norms on a finite interval / B. Bojanov, N. Naidenov // J. Approx. Theory. – 2003. – 117. – P. 55–73.
8. **Chui C.K.** A note on Landau's problem for bounded intervals / C.K. Chui, P.W. Smith // Amer. Math. Monthly. – 1975. – 82. – P. 927-929.
9. **Landau E.** Einige Ungleichungen fur zweimal differenzierbare Funktionen // Proc. London Math. Soc. – 1913. – 13. – P. 43–49.
10. **Sato M.** The Landau inequality for bounded intervals with $\left\|f^{(3)}\right\|$ finite // J. Approx. Theory. – 1982. – 34. – P. 159–166.
11. **Widder D.V.** The Laplace Transform – Princeton Math. Series, 1946, –406 pp.

Надійшла до редколегіі 16 02 09.

УДК 519.41/47

О.М. Ткаченко
Придніпровська державна академія будівництва та архітектури

УМОВИ, ПРИ ЯКИХ ПРОЕКЦІЙНІ СИЛОВСЬКІ ПІДГРУПИ МАЙЖЕ ЛОКАЛЬНО-НОРМАЛЬНОЇ ГРУПИ ЛОКАЛЬНО СПРЯЖЕНІ

Виділено два підкласи розширень локально нормальних груп за допомогою скінченних р-груп, в яких проекційні силовькі р-підгрупи локально спряжені. У першому випадку локально-нормальна підгрупа F скінченного індексу містить інваріантну силовську р$'$-підгрупу, в другому – силовські р-підгрупи в F майже абелеві. Наведено приклад, який показує, що для обох підкласів умова розширення локально нормальної групи саме за допомогою р-групи є істотною.

З критеріїв локальної спряженості силовських підгруп в майже локально нормальній групі [2] слідує, що дослідження того, які силовькі p-підгрупи майже локально-нормальної групи є локально спряженими, багато в чому зводиться до вивчення скінченних добутків груп виду

$$G = FB, \tag{1}$$

де F – нормальний дільник, в якому існують силовські p-підгрупи P й Q, що задовольняють наступним двом умовам:

1) підгрупи P й Q належать нормалізатору деякої силовської p-підгрупи множника B;

2) $P^x = Q$, де $x \in N_G(B)$.

Якщо B – p-підгрупа, то, умова 1) трансформується, очевидно, в умову

1а) підгрупи P й Q нормалізуються множником B.

Умови 1), 1а) виникають у випадках, коли йдеться про проекційні силовські p-підгрупи майже локально-нормальної групи [3]. Тому питання локальної спряженості проекційних силовських p-підгруп зводиться до того, щоб визначити, для яких добутків виду (1) з умови 1) або для окремого випадку умови 1а) випливає умова 2).

Як показує лема 2 [4], з умови 1а) слідує умова 2), якщо силовські p-підгрупи множника F абелеві. Наступна лема показує, що таке ж слідування має місце, якщо силовська p'-підгрупа множника F інваріантна.

Лема. Нехай $G = FB$ – скінченна група, $F \lhd G$, B – p- група, яка нормалізує силовські p-підгрупи P й Q множника F. Якщо множник F містить інваріантну силовську p' – підгрупу W, то існує такий елемент $x \in W$, що $P^x = Q$ і $[B,x] = 1$.

Доведення. Від супротивного. Нехай G – контрприклад найменшого порядку Візьмемо такий довільний елемент $y \in W$, що $P^y = Q$. Тоді $(Z(P))^y = Z(Q)$, тому $Z(Q) \leq W \cdot Z(P)$. Так як силовські p- підгрупи добутку $W \cdot Z(P)$ абелеві, то згідно леми 2 [4] існує такий елемент $z \in W$, що $(Z(P))^z = Z(Q)$ і $[B,z]=1$. Тоді $F = \langle P^z, Q \rangle$ і $(Z(P))^y \leq Z(F)$ Позначимо через a елемент підгрупи $Z(Q)$, який централізує множник B і перейдемо до фактор-групи $G/\langle a \rangle$. Згідно вибору G існує такий елемент $x \in W$, що $P^x = Q$ і $[B,x] \leq \langle a \rangle$ Але оскільки множник B нормалізує підгрупу W, то $[B,x]=1$, що дає суперечність. Лему доведено

Теорема. *Нехай група G розкладається у добуток виду $G = FB$, де множник F інваріантний та локально-нормальний, а множник B – скінченна p-група. Будь-які дві проекційні силовські p-підгрупи групи G локально спряжені, якщо виконується одна з наступних умов·*

1) силовські p-підгрупи множника F майже абелеві;

2) силовська p'-підгрупа множника F інваріантна.

Доведення. Нехай P й Q – проекційні силовські p-підгрупи групи G Оскільки кожна з них спряжена деякій силовській p-підгрупі, яка містить множник B то можемо вважати, що $B \leq P, B \leq Q$ Якщо силовські p-підгрупи множника F майже абелеві, то доведення локальної спряженості підгруп P й Q проводиться, як і в теоремі 2 [4]. Якщо ж силовська p'-підгрупа множника F інваріантна, то твердження теореми негайно слідує з леми та теореми 1 [2].

Теорему доведено.

Приклад. В силу *теореми 3* роботи 2 для побудови прикладу, який показував би суттєвість того, що в доведеній вище теоремі множник B є саме p-групою, досить знайти скінченну групу $G = F\lambda B$, в якій B – p'-група, силовські p-підгрупи множника F абелеві, силовська p'-підгрупа цього ж множника інваріантна, у множника F існують дві такі силовські p-підгрупи P й Q, що для будь-якого елемента $x \in N_G(B)$ виконується співвідношення $P^x \neq Q$.

Нехай $p=2$, $q=3$, W – циклічна група порядку $9=q^2$, $A = Aut(W)$, $G = W\lambda A$ Добре відомо, що A – циклічна група порядку 6. Тоді $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, де $|a|=2$, $|b|=3$. Позначимо $F = W\lambda\langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$

Для доведення того, що група $G = F\lambda B$ є шуканою, за допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP розроблено програму, текст якої наведено нижче

```
#-----------------------------------------------
# функція повертає список силовських
# p-підгруп групи G
#-----------------------------------------------
SylowSubgroups:=function(G,p)
local l, sb;
sb:=SylowSubgroup(G,p);
l:=ConjugacyClassSubgroups(G,sb),
return l;
end,
#-----------------------------------------------
# функція повертає число 0, якщо будь-яка підгрупа
# зі списку L спряжена до підгрупи P за допомогою
# деякого елемента підгрупи C, і номер першої підгрупи
#  зі списку L, яка не спряжена до підгрупи P за
#  за  допомогою елемента підгрупи C
#-----------------------------------------------
AreSylowSBCentralizeConjugate:=function(G,P,L,C)
local sb, g, cc, n;
n:=0;
for sb in L do
   n:=n+1;
    cc:=false,
    for g in C do
       if (ConjugateSubgroup(P,g) =sb) then
          cc:=true;
          break;
       fi,
    od;
    if not cc then
      return n;
    fi;
od;
return 0;
end,
#-----------------------------------------------
# тіло програми
#-----------------------------------------------
# Побудова групи G
n:=2;
p:=2;
q:=3;
OrdQ:=q^n;
```

```
W:=CyclicGroup(OrdQ);
Aut:=AutomorphismGroup(W);
apc:=IsomorphismPcGroup(Aut);
AutG:=Image(apc);
apci:=InverseGeneralMapping(apc);
G:=SemidirectProduct(AutG,apci,W);
BBig:=Image(Embedding(G,1));
W:=Image(Embedding(G,2));
B:=SylowSubgroup(BBig,q);
B:=Zocol(B,q);
P:=SylowSubgroup(G,p);
F:=ClosureGroup( W, P );
G:=ClosureGroup(F, B );
LSylow:=SylowSubgroups(G,p);
N:=Normalizer(G,B);
# Перевірка того, що група G є шуканою:
# ознакою цього є відмінність від нуля значення змінної flag
flag:=AreSylowSBCentralizeConjugate(G,P,LSylow,N);
Print(flag, "\n");
```

При виконанні програми значення змінної flag виявляється рівним 2, що говорить про те, силовська 2-підгрупа P та друга підгрупа із списку LSylow усіх силовьких 2-підгруп множника F не є спряженими за допомогою елемента, який би нормалізував множник B.

Бібліографічні посилання

1. **Ткаченко А.Н.** Силовские подгруппы почти локально нормальных групп / А.Н. Ткаченко// Укр. матем. журн. – 1984. – 36, № 6. – С. 798-801.
2. **Ткаченко О.М.** Умови локальної спряженості підгруп Силова у майже локально-нормальній групі/О.М. Ткаченко// Математичні студії.– 2008, Т.29, № 2, С. 127-131.
3. **Ткаченко О.М.** Майже локально-нормальні групи, всі силовські підгрупи яких проекційні/О.М. Ткаченко // Науковий вісник НГУ 2005, № 8, С. 74-76.
4. **Ткаченко О.М.** Ознака ізоморфності силовських підгруп майже локально-нормальної групи/О.М. Ткаченко// Вісник Дніпропетр. національного ун-ту. Математика. – 2005, Вип. 9, № 12, С. 102-103.

Надійшла до редколегії 17.01.09

УДК 517.5

М.Е. Ткаченко, В.Н. Трактинская

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТА НАИЛУЧШЕГО НЕСИММЕТРИЧНОГО L_1-ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ПОДПРОСТРАНСТВОМ ПОСТОЯННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Отримані умови єдиності елемента найкращого несиметричного L_1-наближення неперервних на метричному компакті векторнозначних функцій підпростором сталих відображень.

Пусть Q – метрический компакт, Σ – σ-поле борелевских подмножеств Q и μ – неотрицательная, конечная, безатомная мера, положительная на любом непустом открытом подмножестве Σ.

Через $C_1(Q)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : Q \to R$ с нормой

$$\|f\|_{1;\alpha,\beta} = \int_Q |f(x)|_{\alpha,\beta} d\mu(x),$$

где $|f(x)|_{\alpha,\beta} = \alpha \cdot f_+(x) + \beta \cdot f_-(x)$ и α, β – положительные числа,

через R_1^m – пространство векторов $\bar{f} = (f_1, ..., f_m)$ с нормой

$$\|\bar{f}\|_{\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^m |f_i|_{\alpha,\beta},$$

а через $C_1(Q, R_1^m)$ – пространство вектор-функций $\bar{f} : Q \to R_1^m$ с нормой

$$\|\bar{f}\|_{1;\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^m \int_Q |f_i(x)|_{\alpha,\beta} d\mu(x),$$

где $\bar{f} = (f_1, ..., f_m)$, $f_i \in C_1(Q)$, $i = 1, ..., m$.

Пусть $\bar{f} \in C_1(Q, R_1^m)$, $H \subset C_1(Q)$.

Величину

$$E(\bar{f}, H)_{1;\alpha,\beta} = \inf\{\|\bar{f} - \bar{u}\|_{1;\alpha,\beta} : \bar{u} = (u, ..., u), \quad u \in H\} \quad (1)$$

будем называть наилучшим (α, β)-приближением вектор-функции $\bar{f}$ множеством H в метрике L_1, а функцию из H, реализующую точную нижнюю грань в правой части равенства (1), – элементом наилучшего (α, β)-приближения $\bar{f}$ в H в метрике L_1.

Совокупность всех элементов наилучшего несимметричного L_1-приближения функции $\bar{f}$ в H будем обозначать $P_H^{\alpha,\beta}(\bar{f})$, а множество нулей функции f через Z_f.

Нам понадобится обобщение теоремы 2 из [2] на случай непрерывных на метрическом компакте функций.

Пусть

$$H' = \{\bar{h} = (h_1,...,h_m) \in C_1(Q,R_1^m) : \exists p_{\bar{h}} \in H \quad \forall x \in Q \quad \left|h_i(x) = p_{\bar{h}}(x)\right|, \quad i = \overline{1,m}\}.$$

Теорема А. *Пусть H – конечномерное подпространство* $C_1(Q)$. *Любая функция* $\bar{f} \in C_1(Q,R_1^m)$ *имеет единственный элемент наилучшего несимметричного* L_1*-приближения в H тогда и только тогда, когда любая функция* $\bar{h} \in H'$ *имеет единственный элемент наилучшего несимметричного* L_1 *-приближения в H.*

Кроме того, нам необходимо будет обобщение критерия единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения на случай непрерывных на метрическом компакте функций, который сразу вытекает из теоремы А, а также из теоремы 1 и леммы 3 из [2].

Теорема В. *Пусть H – конечномерное подпространство* $C_1(Q)$. *Любая функция* $\bar{f} \in C_1(Q,R_1^m)$ *имеет единственный элемент наилучшего* (α,β)*-приближения в H в метрике* L_1 *тогда и только тогда, когда для любой функции* $\bar{h} \in H'/\{\bar{0}\}$ *существует функция* $p \in H$ *такая, что*

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{Q\setminus Z_{h_i}} p(x)\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} h_i(x)d\mu(x) > \sum_{i=1}^{m} \int_{Z_{h_i}} \left|p(x)\right|_{\beta,\alpha} d\mu(x), \tag{2}$$

где $\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} f(x) = \alpha \cdot \operatorname{sgn} f_+(x) - \beta \cdot \operatorname{sgn} f_-(x)$.

Далее в качестве приближающего пространства будем рассматривать подпространство постоянных отображений

$$H_0 = \{f \in C_1(Q) : \quad f(x) = a, \quad \forall x \in Q, \quad a \in R\}.$$

Будем рассматривать вопросы единственности элемента наилучшего (α,β)-приближения в метрике L_1 для функций из $C_1(Q,R_1^m)$ подпространством H_0. Такая задача для функций со значениями в строго нормированном банаховом пространстве при $\alpha = \beta = 1$ рассматривалась в [1], для несимметричного приближения функций со значениями в строго нормированном КВ-пространстве – в [3], а для векторнозначных функций при $\alpha = \beta = 1$ – в [4 и 5].

Теорема 1. *Пусть Q – односвязный метрический компакт. Тогда подпространство H_0*

1) *не является множеством единственности элемента наилучшего (α,β)-приближения в метрике L_1 для пространства $C_1(Q,R_1^m)$, если существует натуральное число k такое, что выполняется одно из условий: $m = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot k$ или $m = \frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot k$;*

2) *является множеством единственности элемента наилучшего (α,β)-приближения для пространства $C_1(Q,\mathbf{R}_1^m)$ в метрике L_1, если каково бы ни было $k\in\mathbf{N}$ $m \neq \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot k$ и $m \neq \frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot k$.*

Доказательство. 1) Пусть существует $k\in N$ такое, что $m = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot k$.

Рассмотрим функцию $\bar{h} = (h_1,\dots,h_m)$ такую, что $\forall x\in Q$, $a\in R_+$

$$h_i(x) = \begin{cases} -a, & i=\overline{1,k}\ , \\ a, & i=\overline{k+1,m}\,. \end{cases}$$

Ясно, что $\bar{h}\in H'$

Рассмотрим для $\bar{a} = (a,\dots,a)$ нормы

$$\|\bar{h}(x)-\bar{a}\|_{1;\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^{m}\int_Q |h_i(x)-a|_{\alpha,\beta}d\mu(x) = \sum_{i=1}^{k}\int_Q 2|-a|_{\alpha,\beta}d\mu(x) +$$

$$+\sum_{i=k+1}^{m}\int_Q |a-a|_{\alpha,\beta}d\mu(x) = 2\beta\cdot a\cdot k\cdot\mu(Q);$$

$$\|\bar{h}(x)-(-\bar{a})\|_{1,\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^{m}\int_Q |h_i(x)+a|_{\alpha,\beta}d\mu(x) = \sum_{i=1}^{k}\int_Q |-a+a|_{\alpha,\beta}d\mu(x) +$$

$$+\sum_{i=k+1}^{m}\int_Q 2|a|_{\alpha,\beta}d\mu(x) = 2a\cdot\alpha(m-k)\cdot\mu(Q) =$$

$$= 2a\cdot\alpha\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}k-k\right)\cdot\mu(Q) = 2a\cdot\beta\cdot k\cdot\mu(Q).$$

Для $\bar{b} = (b,\dots,b)$, $\forall b\in R$, рассмотрим $\|\bar{h}-\bar{b}\|_{1;\alpha,\beta}$.

Если $b\geq a$, то

$$\|\bar{h}(x)-\bar{b}\|_{1;\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^{k}\int_Q |-a-b|_{\alpha,\beta}d\mu(x) + \sum_{i=k+1}^{m}\int_Q |a-b|_{\alpha,\beta}d\mu(x) =$$

$$= k\cdot\beta\cdot|a+b|\mu(Q) + \frac{\beta}{\alpha}k\cdot\beta\cdot|a-b|\mu(Q) \geq k\cdot\beta\cdot|a+b|\cdot\mu(Q) \geq 2a\cdot\beta\cdot k\cdot\mu(Q).$$

Если $|b|<a$, то

$$\|\bar{h}(x)-\bar{b}\|_{1;\alpha,\beta}=\sum_{i=1}^{k}\int_{Q}\left|-a-b\right|_{\alpha,\beta}d\mu(x)+\sum_{i=k+1}^{m}\int_{Q}\left|a-b\right|_{\alpha,\beta}d\mu(x)=$$

$$=k\cdot\beta\cdot|a+b|\mu(Q)+\frac{\beta}{\alpha}k\cdot\alpha\cdot|a-b|\mu(Q)=k\cdot\beta\cdot\mu(Q)(|a+b|+|a-b|)\geq 2a\cdot\beta\cdot k\cdot\mu(Q).$$

Если $b\leq -a$, то

$$\|\bar{h}(x)-\bar{b}\|_{1;\alpha,\beta}=\sum_{i=1}^{k}\int_{Q}\left|-a-b\right|_{\alpha,\beta}d\mu(x)+\sum_{i=k+1}^{m}\int_{Q}\left|a-b\right|_{\alpha,\beta}d\mu(x)=$$

$$=k\cdot\alpha\cdot|a+b|\mu(Q)+\frac{\beta}{\alpha}k\cdot\alpha\cdot|a-b|\mu(Q)\geq k\cdot\beta\cdot|a+(-b)|\cdot\mu(Q)\geq 2a\cdot\beta\cdot k\cdot\mu(Q).$$

Итак, получили, что для $\bar{b}=(b,\ldots,b)$, $\forall b\in R$, $\|\bar{h}-\bar{b}\|_{1;\alpha,\beta}\geq 2a\cdot\beta\cdot k\cdot\mu(Q)$.

Таким образом, $a,-a\in P^{\alpha,\beta}_{H_0}(\bar{h})$, а значит, пространство H_0 не является множеством единственности элемента наилучшего (α,β)-приближения для H' в метрике L_1, а по теореме А и для $C_1(Q,R^m_1)$.

Случай, когда существует $k\in N$ такое, что $m=\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot k$, рассматривается аналогично.

2) Пусть теперь $\forall k\in N$ $m\neq\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot k$ и $m\neq\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot k$.

По теореме В H_0 – подпространство единственности элемента наилучшего (α,β)-приближения для пространства $C_1(Q,R^m_1)$ в метрике L_1 тогда и только тогда, когда $\forall\bar{h}\in H'/\{\bar{0}\}$ $\exists a_0\in R$:

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{Q\setminus Z_{h_i}}a_0\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}h_i(x)d\mu(x)>\sum_{i=1}^{m}\int_{Z_{h_i}}\left|a_0\right|_{\beta,\alpha}d\mu(x).$$

Пусть $\bar{h}$ – произвольная функция множества $H'/\{\bar{0}\}$, тогда $\exists a_h\in R\setminus\{0\}$: $|h_i(x)|=|a_h|$, $i=\overline{1,m}$, $\forall x\in Q$. Причем $Z_{h_i}=\varnothing, i=\overline{1,m}$, и $\sum_{i=1}^{m}\int_{Z_{h_i}}\left|a_h\right|_{\beta,\alpha}d\mu(x)=0.$

Обозначим

$$N=\{i:\ h_i<0\},\qquad M=\{i:\ h_i>0\}.$$

Заметим, что $\operatorname{card}M+\operatorname{card}N=m$. Покажем, что $\alpha\cdot\operatorname{card}M\neq\beta\cdot\operatorname{card}N$. Действительно, положим $\alpha\cdot\operatorname{card}M=\beta\cdot\operatorname{card}N$, тогда, решая систему

$$\begin{cases}\operatorname{card}M+\operatorname{card}N=m,\\ \alpha\cdot\operatorname{card}M-\beta\cdot\operatorname{card}N=0,\end{cases}$$

Получаем, что $m = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot \operatorname{card} N$, что противоречит условию.

Если $\alpha\cdot\operatorname{card}M > \beta\cdot\operatorname{card}N$, то в качестве a_0 возьмём $|a_h|$, тогда

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{Q\setminus Z_{h_i}}|a_h|\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} h_i(x)d\mu(x) = \alpha\cdot\sum_{i\in M}\int_Q |a_h| d\mu(x) - \beta\cdot\sum_{i\in N}\int_Q |a_h| d\mu(x) =$$

$$= |a_h|\cdot\mu(Q)(\alpha\cdot\operatorname{card}M - \beta\cdot\operatorname{card}N) > 0.$$

Если $\alpha\cdot\operatorname{card}M < \beta\cdot\operatorname{card}N$, то достаточно взять $a_0 = -|a_h|$. По теореме В H_0 является подпространством единственности элемента наилучшего (α,β)-приближения для пространства $C_1(Q,R_1^m)$ в метрике L_1.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть метрический компакт* $Q=\bigcup_{j=1}^{n}Q_j$, *где* Q_j *– связные компакты. Тогда*

1) если $\exists k\in N$: $m = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot k$ *или* $m = \frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot k$, *то подпространство* H_0 *не является множеством единственности элемента наилучшего* (α,β)*-приближения для* $C_1(Q,R_1^m)$ *в метрике* L_1*;*

2) если $\forall k\in N$ $m \neq \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot k$ *и* $m \neq \frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot k$, *то подпространство* H_0 *является множеством единственности элемента наилучшего* (α,β)*-приближения для* $C_1(Q,R_1^m)$ *в метрике* L_1, *если метрический компакт* Q *удовлетворяет условию, что для любого набора целых чисел* $0\le k_j\le m$,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot k_j - m\right)\cdot\mu(Q_j)\neq 0.$$

Доказательство. 1) Пусть $\exists k\in N$: $m = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot k$ или $m = \frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot k$.

Множество H' будет иметь вид:

$$H' = \{\bar h = (h_1,\dots,h_m) \mid \exists a_{\bar h}\in R:\ \forall x\in\bigcup_{j=1}^{n}Q_j\quad |h_i(x)| = |a_{\bar h}|,\quad i=\overline{1,m}\}.$$

Пусть функция $\bar h_0 = (h_1,\dots,h_m)$ такая, что для некоторого $a_0\in R_+$, $\forall x\in Q$

$$h_i(x) = \begin{cases} -a_0, & i=\overline{1,k}\ , \\ a_0, & i=\overline{k+1,m}. \end{cases}$$

Ясно, что $\bar h_0\in H'$.

Тогда $\forall a \in R$ левая часть неравенства (2)

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{Q \setminus Z_{h_i}} a \ \mathrm{sgn}_{\alpha,\beta} h_i(x) d\mu(x) = -\beta \sum_{i=1}^{k} \int_Q a d\mu(x) + \alpha \sum_{i=k+1}^{m} \int_Q a d\mu(x) =$$

$$= -\beta \cdot k \cdot a \cdot \mu(Q) + \alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} k \cdot a \cdot \mu(Q) = 0.$$

Так как $h_i(x) \neq 0$, $\forall x \in Q$, то $Z_{h_i} = \varnothing$, и $\forall a \in R$ $\sum_{i=1}^{m} \int_{Z_{h_i}} |a|_{\beta,\alpha} d\mu(x) = 0.$

Таким образом, получили отрицание необходимого условия в теореме В, а, следовательно, H_0 не является подпространством единственности элемента наилучшего (α,β)-приближения для $C_1(Q,R_1^m)$ в метрике L_1.

2) Пусть $\forall k \in N$ $m \neq \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \cdot k$ и $m \neq \frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot k$.

Пусть $\bar{h}$ – произвольная функция $H'/\{\bar{0}\}$, тогда $\exists a_h \in R$: $|h_i(x)| = |a_h|$, $\forall x \in Q$, $i = \overline{1,m}$.

Так как $\bar{h} \neq \bar{0}$, то $a_h \neq 0$, $Z_{h_i} = \varnothing$ и $\sum_{i=1}^{m} \int_{Z_{h_i}} |a_h|_{\beta,\alpha} d\mu(x) = 0.$

Введём обозначения:

$$A_i = \left\{ x \in \bigcup_{j=1}^{n} Q_j : h_i(x) > 0 \right\}, \quad B_i = \left\{ x \in \bigcup_{j=1}^{n} Q_j : h_i(x) < 0 \right\}.$$

Заметим, что A_i и B_i совпадают с какой-либо компонентой связности Q_j, некоторым их объединением или пустым множеством, и

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) + \sum_{i=1}^{m} \mu(B_i) = m \cdot \sum_{j=1}^{n} \mu(Q_j) \qquad (3)$$

Покажем, что $\alpha \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \neq \beta \sum_{i=1}^{m} \mu(B_i)$. Предположим, что выполняется равенство, тогда в силу (3)

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^{m} \mu(B_i) = m \sum_{j=1}^{n} \mu(Q_j).$$

В силу выбора множеств B_i существует набор целых чисел $0 \leq k_j \leq m$, $j = \overline{1,n}$, таких, что $\sum_{i=1}^{m} \mu(B_i) = \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot \mu(Q_j)$.

Тогда

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha} \sum_{j=1}^{n} k_j \mu(Q_j) - m \sum_{j=1}^{n} \mu(Q_j) = 0,$$

или

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}k_j-m\right)\mu(Q_j)=0,$$

что противоречит условию, наложенному на метрический компакт Q. Таким образом, $\alpha\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)\neq\beta\sum_{i=1}^{m}\mu(B_i)$.

Если $\alpha\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)>\beta\sum_{i=1}^{m}\mu(B_i)$, то возьмём в неравенстве (2) в качестве $p=|a_h|$

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{Q\setminus Z_{h_i}}|a_h|\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}h_i(x)d\mu(x)=\sum_{i=1}^{m}\Big(\int_{A_i}|a_h|\cdot\alpha d\mu(x)+\int_{B_i}|a_h|\cdot(-\beta)d\mu(x)\Big)=$$

$$=|a_h|\Big(\alpha\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)-\beta\sum_{i=1}^{m}\mu(B_i)\Big)>0.$$

Если $\alpha\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)<\beta\sum_{i=1}^{m}\mu(B_i)$ то достаточно взять $p=-|a_h|$.

В силу теоремы В H_0 является подпространством единственности элемента наилучшего (α,β)-приближения для пространства $C_1(Q,\mathbf{R}_1^m)$ в метрике L_1.

Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** Достатні умови єдиності елемента найкращого L_1-наближення для функцій зі значеннями у банаховому просторі / В.Ф. Бабенко, М.Є. Ткаченко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. –Вип.8. –2003. –С. 19–25.
2. **Горбенко М.Е.** О единственности элемента наилучшего несимметричного приближения векторнозначных функций в метрике L_1/ М.Е. Горбенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. –Вип.3. –1998. –С. 33–41.
3. **Ткаченко М.Є.** Достатні умови єдиності елемента найкращого несиметричного L_1-наближення для функцій зі значеннями в КВ-просторі / М.Є. Ткаченко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. –Вип.11. –2006. –С. 90–97.
4. **Ткаченко М.Е.** Условия единственности элемента наилучшего L_1-приближения для вектор-функций подпространством постоянных отображений / М.Є. Ткаченко, В.П. Трактинская // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – Вип.13. – 2008. – С. 144–148.
5. **Pinkus A.** Uniqueness in Vector-Valued Approximation // Journal of Approx. Theory. – V.73, № 1. – 1993. – P.17–92.

Надійшла до редколегії 10 02 09

УДК 512.544

В. А. Чупордя

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ПРО ПІДГРУПИ БЛИЗЬКІ ДО ПРОНОРМАЛЬНИХ

Підгрупа H групи G називається абнормальною в G, якщо для довільного $g \in G$ вірне включення $g \in \langle H, Hg \rangle$. Підгрупа H групи G називається строго самонормалізуємою, якщо для довільної підгрупи K такої, що $H \leq K$, виконується рівність $N_K(H) = H$. Отримано приклади строго самонормалізуємих підгруп, які не є абнормальними.

Підгрупа H групи G називається пронормальною в G, якщо підгрупи H і H^g спряжені в групі $\langle H, H^g \rangle$, для довільного $g \in G$. Термін «пронормальна підгрупа» введений Ф. Холом більше тридцяти років назад, а перші результати пов'язані з пронормальними підгрупами з'явились у роботі Д. Роуса [5].

Розглянемо деякі типи підгруп, пов'язаних з пронормальними. Підгрупа H групи G називається абнормальною в G, якщо для довільного $g \in G$ вірне включення $g \in \langle H, H^g \rangle$. Абнормальні підгрупи вперше розглядав Ф. Холл [4], але термін «абнормальна підгрупа» введений Р. Картером [3]. Довільна абнормальна підгрупа є пронормальною і довільна максимальна підгрупа, що не є нормальною буде абнормальною.

Будемо називати підгрупу H групи G контранормальною, якщо $H^G = H$. Довільна абнормальна підгрупа є контранормальною, зворотне твердження в загальному випадку не вірне, в роботі Дж. Вінчензі, Л.А. Курдаченка і А. Руссо [1] є відповідний приклад.

Підгрупу H групи G будемо називати наближено пронормальною, якщо $N_K(H)$ є контранормальним у довільній підгрупі K, що містить у собі H, або інакше кажучи, підгрупа H групи G є наближено пронормальною, якщо для довільної підгрупи K такої, що $H \leq K$ має місце рівність $(N_K(H))^K = K$. Очевидно, що наближено пронормальні підгрупи є узагальненням пронормальних підгруп. В [1] доведено, що якщо G – (узагальнено) розв'язна група, в якій кожна підгрупа є наближено пронормальною, то всі підгрупи групи G є пронормальними, тобто в таких групах поняття «наближено пронормальних» і «пронормальних» підгруп збігаються. Таким чином виникає природне питання про знаходження підгрупи деякої групи яка б була наближено пронормальною, але не була б пронормальною. У зв'язку з цим використовуючи систему комп'ютерної алгебри GAP написано програму для пошуку таких прикладів. За її допомогою розглянуто наступні групи: S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, а також GL(2, 3), GL(2, 5), GL(2, 7), GL(3, 3). Виявилося, що в наведених групах кожна підгрупа, що є наближено пронормальною є одночасно і пронормальною. Отже пошук указаного типу підгруп можна продовжити або у підгрупах вказаних груп, або ж брати інші групи.

Будемо називати підгрупу H групи G строго самонормалізуємою, якщо для довільної підгрупи K групи G такої, що $H \leq K$, виконується рівність $N_K(H) = H$. Довільна абнормальна підгрупа є строго самонормалізуємою. За допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP, написано програму для пошуку підгруп, які б були строго самонормалізуємими, але не були б абнормальними. Отримано наступні результати:

- S_5 – указаних типів підгруп немає, тобто в S_5 довільна підгрупа, що є строго самонормалізуємою є одночасно і абнормальною;
- S_6 – дві підгрупи:

< (5,6), (2,3,4), (3,4) >,
< (1,2)(3,4)(5,6), (1,3,5)(2,4,6), (3,5)(4,6)>

- S_7 – три підгрупи:

< (4,5)(6,7), (4,6)(5,7), (1,2,3)(5,6,7), (2,3)(6,7) >,
< (2, 3)(4, 5)(6, 7), (2,4,6)(3,5,7), (4,6)(5,7) >,
< (1,2,3,4,5,6,7), (1,2)(3,6) >

Усі наведені приклади підгруп знайдені з точністю до спряженості, тобто кожна спряжена група до вказаних підгруп у відповідних групах буде мати ті ж властивості.

Кожна абнормальна і кожна нормальна підгрупа є пронормальною. тому можна розглядати питання про різницю між множиною пронормальних підгруп та об'єднанням множини анормальних та множини нормальних підгруп. Відповідну різницю було знайдено у симетричних групах S_4, S_5, S_6, S_7:

- S_4 – 3 підгрупи

< (1,2)(3,4), (3,4) >, < (2,4,3) >,
< (1,2)(3,4), (1,3,2,4) >

- S_5 – 10 підгруп

< (3,4,5), (4,5) >, < (4,5), (2,3) >,
< (4,5), (1,2,3) >, < (3,4,5) >,
< (2,3)(4,5), (2,4)(3,5), (3,4,5) >,
< (3,4,5), (1,2)(4,5) >, < (2,3)(4,5), (2,4)(3,5) >,
< (2,3)(4,5), (2,4,3,5) >, < (1,2,3,4,5), (2,5)(3,4) >,
< (1,2,3,4,5) >

- S_6 - 28 підгруп

< (3,4)(5,6), (3,5)(4,6), (4,5,6), (5,6) >,
< (4,6,5), (4,5), (1,2,3), (2,3) >,
< (5,6), (3,4), (3,5)(4,6) >, < (5,6), (3,4), (1,2) >,
< (5,6), (3,4), (1,2), (1,3,5)(2,4,6) >,
< (5,6), (3,4), (1,2)(3,5)(4,6) >,
< (5,6), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (2,3,4) >,
< (5,6), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) >,
< (5,6), (1,2)(3,4), (1,3,2,4) >,
< (3,4)(5,6), (3,5)(4,6), (4,5,6) >,
< (3,4)(5,6), (3,5)(4,6), (4,5,6), (1,2)(5,6) >,
< (4,5,6), (1,2,3), (2,3)(5,6) >,
< (4,5,6), (1,2,3), (2,3)(5,6), (1, 4)(2, 5)(3, 6) >,
< (4,5,6), (1,2,3), (2,3)(5,6), (1,4)(2,5,3,6) >,
< (4,5,6), (1,2,3) >, < (3,4)(5,6), (3,5)(4,6) >,
< (3,4)(5,6), (3,5)(4,6), (1,2)(5,6) >,
< (3,4)(5,6), (1,2)(5,6), (1,3,5)(2,4,6), (3,5)(4,6) >,
< (3,4)(5,6), (3,5,4,6) >,

$< (3,4)(5,6), (3,5,4,6), (1,2)(5,6) >$,
$< (3,4)(5,6), (1,2)(5,6), (1,3,5)(2,4,6), (3,5,4,6) >$,
$< (3,4)(5,6), (1,2)(5,6) >$,
$< (3,4)(5,6), (1,2)(5,6), (1,3,5)(2,4,6) >$,
$< (3,4)(5,6), (1,2)(3,5,4,6) >$, $< (1,2,3,4,5), (3,4,5) >$,
$< (1,2,3,4,6), (1,4)(5,6) >$, $< (2,3.4.5.6). (3.6)(4.5) >$,
$< (2,3,4,5,6) >$

- S_7 маємо вже 56 підгруп

Тут також указано підгрупи з точністю до спряженості.

У [2] доведено, що кожна підгрупа групи A_5, порядок якої відмінний від 2 є пронормальною. З точністю до спряженості знайдено всі підгрупи, що не є пронормальними в знакозмінних групах A_4, A_5, A_6, A_7, наведемо отримані результати:

- A_4

$< (1,2)(3,4) >$

- A_5

$< (2,3)(4,5) >$

- A_6

$< (4,5,6) >$, $< (4,5,6), (2,3)(5,6) >$,
$< (3,4)(5,6) >$, $< (1,2,3)(4,5,6), (2,3)(5,6) >$,
$< (1,2,3)(4,5,6) >$

- A_7

$< (5,6,7) >$, $< (5,6,7), (3,4)(6,7) >$,
$< (5,6,7), (1,2)(3,4) >$, $< (4,5)(6,7) >$,
$< (2,3,4)(5,6,7), (3,4)(6,7) >$, $< (2,3,4)(5,6,7) >$

Бібліографічні посилання

1. **Винчензи Дж.** О некоторых группах, все подгруппы которых близки к пронормальным./ Дж. Винчензи, Л.А. Курдачено, А. Руссо // Укр. мат. журн. – 2007. – Т 59, № 10. – С. 1331 – 1338.
2. **Bui Xuan Hai.** On polynormal subgroups with abnormal normalizers in finite groups. / Bui Xuan Hai, Tong Viet Phi Hung and Truong Van Dai// http://www.math.hcmuns.edu.vn/~bxhai/abc/poly.pdf.
3. **Carter R.W.** Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups. / R.W. Carter // Math. Z. – 1961. – № 75. – P. 136 – 139.
4. **Hall P.** On system normalizers of soluble groups. / P. Hall // Ibid. – 1937. – № 43. – P. 507 – 528.
5. **Rose J.S.** Finite soluble groups with pronormal system normalizers / J.S. Rose // Proc. London Math. Soc. – 1967. – № 17. – P. 447 – 469.

Надійшла до редколегії 19. 02 09

УДК 512.544

О. А. Яровая
Национальный университет государственной налоговой службы Украины

О ГРУППАХ, БЛИЗКИХ К МЕТАГАМИЛЬТОНОВЫМ

Розглядаються групи, будь-яка підгрупа яких або нормальна, або має черніковський комутант. Доведено, що коли така група має підгрупу скінченого індексу, комутант якої є черніковською підгрупою, то і комутант всієї групи також буде черніковською підгрупою.

Пусть G – группа, через $L_{norm}(G)$ обозначим семейство всех нормальных подгрупп G Изучение влияния семейства $L_{norm}(G)$ на структуру группы G было начато очень давно. Так Р. Дедекинд в [1] описал конечные группы, у которых всякая подгруппа нормальна (т. е. семейство $L_{norm}(G)$ состоит из всех подгрупп). Позже описание Р. Дедекинда было расширено на произвольные группы в [2]. Отметим, что группы, всякая подгруппа которых нормальна, были позднее названы *дедекиндовыми* С [3; 4] начинается изучение (конечных) групп, у которых семейство $L_{non-norm}(G)$ всех подгрупп, не являющихся нормальными, удовлетворяет некоторому достаточно сильному ограничению Так в [3, 4] изучалось строение конечных групп, в которых все подгруппы, не являющиеся нормальными, либо сопряжены, либо распадаются в два класса сопряженных подгрупп С [5] начинается изучение бесконечных групп, у которых семейство всех подгрупп, не являющихся нормальными, удовлетворяет некоторому естественному условию конечности. Эта работа положила начало очень обширной тематики. Одной из задач, которые здесь возникали, являлась задача об изучении групп, все подгруппы которых либо нормальны, либо абелевы. Эти группы начали изучать в [6 – 8] Они были названы *метагамильтоновыми*. Конечные метагамильтоновы группы изучались в [9, 10]. Полное описание метагамильтоновых групп было получено в [11 – 17] Естественным продолжением таких исследований является рассмотрение ситуации, когда подгруппы семейства $L_{non-norm}(G)$ принадлежат к классу групп, который является естественным расширением класса абелевых групп Так в [18, 19] рассматривались группы, в которых подгруппы семейства $L_{non-norm}(G)$ имеют конечный коммутант или являются FC - группами. В настоящей работе продолжаются исследования в данном направлении Поскольку естественным обобщением конечных групп являются черниковские группы, то естественным расширением групп с конечным коммутантом являются группы с черниковским коммутантом. В настоящей работе начинается изучение групп, в которых всякая подгруппа либо нормальна, либо имеет черниковский коммутант Более конкретно, изучение этих групп распадается на два естественных случая (а) коммутант всякой подгруппы конечного индекса не является черниковской подгруппой (а потому всякая подгруппа конечного индекса является нормальной), (б) группа включает в себя подгруппу конечного индекса, имеющую черниковский коммутант. Данная работа посвящена описанию второго случая. Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Если G включает в себя подгруппу конечного индекса, коммутант которой – черниковская группа, то и коммутант всей группы G будет черниковской группой.*

Доказательство основного результата базируется на серии приводимых ниже вспомогательных результатов.

Лемма 1. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант.

(1) Если H – подгруппа G, то всякая ее подгруппа или нормальна, или имеет черниковский коммутант.

(2) Если L – нормальная подгруппа G, то всякая подгруппа G/L или нормальна, или имеет черниковский коммутант.

(3) Если S – подгруппа G, коммутант которой не является черниковской подгруппой, то G/S – дедекиндова группа.

Все эти утверждения почти очевидны.

Лемма 2. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Предположим, что A – нормальная абелева подгруппа без кручения группы G. Если нормализатор $N_G(A)$ содержит элемент g конечного порядка, то $g \in C_G(A)$.

Доказательство. Предположим противное, пусть $g \notin C_G(A)$. Пусть m – произвольное натуральное число и положим $H_m = \langle A^m, g \rangle$. Поскольку A^m – характеристическая подгруппа A, то A^m будет $\langle g \rangle$ – инвариантной, так что $\langle A^m, g \rangle = A^m \rtimes \langle g \rangle$. Отсюда получаем включение $[H_m, H_m] \leq A^m$. Допустим, что подгруппа $\langle g, A^m \rangle$ – абелева. Тогда имеем $(a^g)^m = (a^m)^g = a^m$ для каждого элемента $a \in A$. Поскольку в абелевой группе без кручения извлечение корня однозначно, то отсюда вытекает равенство $a^g = a$, которое показывает, что $g \in C_G(A)$, а это противоречит нашему допущению. Следовательно, подгруппы $\langle g, A^m \rangle$ неабелевы при любом $m \in N$. В свою очередь, это означает, что их коммутанты $[H_m, H_m]$ будут неединичными для каждого $m \in N$. Как мы могли видеть выше, в этом случае $[H_m, H_m]$ – подгруппа без кручения. В частности, она не является черниковской. В этом случае подгруппа $\langle g, A^m \rangle$ нормальна при любом $m \in N$, а потому $\langle g \rangle = \cap_{m \in N} \langle g, A^m \rangle$ также будет нормальной. Но тогда из равенства $\langle g \rangle \cap A = \langle 1 \rangle$ получим, что $g \in C_G(A)$. Это финальное противоречие и доказывает результат.

Следствие 1. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Предположим, что A – нормальная абелева подгруппа без кручения группы G. Если нормализатор $N_G(A)$ содержит такой элемент g бесконечного порядка, что $g^k \in A$ для некоторого натурального k, то $g \in C_G(A)$.

Доказательство. Предположим противное, пусть $g \notin C_G(A)$. Так как $1 \neq g^k \in A$, то $C = C_A(g) \neq \langle 1 \rangle$. Так как извлечение корня в абелевой группе без кручения является однозначным, то подгруппа C будет сервантной в A. Из сделанного выше допущения вытекает, что $C \neq A$. Выберем элемент $b \in A \setminus C$ и положим $B = \langle b \rangle^{\langle g \rangle}$. Тогда $Z = B \cap C \neq B$, Z является $\langle g \rangle$ - инвариантной подгруппой и $B/Z = B/(B \cap C) \cong BC/C$ – конечно порожденная абелева группа без кручения Другими словами, B/Z – свободная абелева группа конечного ранга. Но тогда Z выделяется прямым множителем, т.е. $B = Z \times R$ для некоторой подгруппы R [20, теорема 14.4]. Но тогда B включает в себя такую $< g >$ - инвариантную подгруппу E, что $Z \cap E = <1>$ и фактор – группа B/ZE конечна [21, Следствие 5.12] В частности, подгруппа E – нееденична. С другой стороны, в фактор - группе $< gC, A/C >$ элемент gC имеет конечный порядок, и из леммы 2 вытекает, что $< gC, A/C >$ – абелева Отсюда получаем включение $[g, E] \le C$. С другой стороны, подгруппа E – $< g >$ - инвариантна, так что $[g, E] \le E$. Итак, $[g, E] \le C \cap E$, а это означает, что $[g, E] = <1>$ и $E \le C_A(g) = C$ Полученное противоречие и доказывает равенство $A = C_A(g)$.

Следствие 2. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Предположим, что A - нормальная абелева подгруппа без кручения группы G. Тогда фактор - группа $N_G(A)/C_G(A)$ не имеет кручения.

Лемма 3. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Пусть, далее, g – элемент группы G и предположим, что $A = \times_{n \in N} A_n$, где A_n – $< g >$ - инвариантная неединичная подгруппа, $n \in N$. Тогда найдется такой номер k, что $[A_n, g] = <1>$ для всех $n \ge k$.

Доказательство. Предположим, что подгруппа $< g >$ – нормальна и пусть $< x > = < g > \cap A$. Найдется такой номер k, что $< x > \cap \times_{n \ge k} A_n = <1>$ Поскольку подгруппа $< g >$ – нормальна, то для любого элемента $y \in G$ имеем включение $[< g >, y] \le < g >$. С другой стороны, пусть $n \ge k$ и $a \in A_n$. Так как подгруппа A_n – $< g >$ - инвариантна, то $[g, a] \in A_n$, а значит, $[g, a] \in A_n \cap < g > = <1>$. Таким образом, в этом случае $[A_n, g] = <1>$ для всех $n \ge k$. Предположим теперь, что подгруппы $[A_n, g]$ – неединичны для бесконечного множества чисел n. Чтобы не вводить новых обозначений, можно считать, что $[A_n, g] \ne <1>$ для всех $n \ge k$ Как будет видно из дальнейшего, это не нарушит общности рассуждений. Существуют два таких бесконечных подмножества Δ и Σ, что $\Delta \cup \Sigma = \{ n \mid n \ge k \}$, а $\Delta \cap \Sigma = \varnothing$ Положим $A(\Delta) = \times_{n \in \Delta} A_n$ и $A(\Sigma) = \times_{n \in \Sigma} A_n$. Отметим сразу, что $A(\Delta) \cap A(\Sigma) = <1>$ Имеем

$$\times_{n \in \Delta} [g, A_n] \le [< g > A(\Delta), < g > A(\Delta)] \quad \text{и}$$
$$\times_{n \in \Sigma} [g, A_n] \le [< g > A(\Sigma), < g > A(\Sigma)].$$

Эти включения показывают, что коммутанты $[< g > A(\Delta), < g > A(\Delta)]$ и $[< g > A(\Sigma), < g > A(\Sigma)]$ не могут быть черниковскими подгруппами. Это означает, что обе подгруппы $< g > A(\Delta)$ и $< g > A(\Sigma)$ должны быть нормальными. Но тогда и их пересечение $< g > A(\Delta) \cap < g > A(\Sigma)$ является нормальной подгруппой. Из выбора подгрупп $A(\Delta)$ и $A(\Sigma)$ получаем равенство $< g > A(\Delta) \cap < g > A(\Sigma) = < g >$. Таким образом, подгруппа $< g >$ – нормальна, а этот случай уже был рассмотрен ранее.

Лемма 4. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Предположим, что A – абелева p – подгруппа группы G. Если $gC_G(A)$ – q - элемент фактор - группы $N_G(A)/C_G(A)$, где q – простое число, отличное от p, то [A, g] – черниковская подгруппа.

Доказательство. Отметим сразу, что подгруппа $C = C_A(g)$ является $< g >$ - инвариантной. Если aC – такой элемент A/C, что $[g, a] = c \in C$, то $g^{-1} a g = ac$, а потому $g^{-k} a g^k = ac^k$ для любого $k \in N$. В частности, если $|gC_G(A)| = t$, то $c^t = 1$. С другой стороны, числа t и p – взаимно просты, а поскольку c – p - элемент, то отсюда получаем равенство c = 1. Таким образом, $C_{A/C}(g) = <1>$. Обозначим через B/C – нижний слой A/C. Из того факта, что числа $|gC_G(A)|$ и p – взаимно просты, получаем разложение $B/C = \times_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda/C$, где A_λ/C – минимальная конечная $< g >$ – инвариантная подгруппа для любого индекса $\lambda \in \Lambda$ (см., например, [21, Следствие 5.14]). Из лемм 1, 3 с учетом равенства $C_{A/C}(g) = <1>$ получаем теперь конечность множества Λ. В свою очередь это влечет конечность B/C. Конечность нижнего слоя p – группы A/C означает, что эта p - группа является черниковской.

Рассмотрим отображение ϕ_g: a ⟶ [a, g], a ∈ A. Так как подгруппа A – абелева, то это отображение будет эндоморфизмом A. Имеем тогда

$$A/C_A(g) = A/\mathrm{Ker}\,\phi_g \cong \mathrm{Im}\,\phi_g = [A, g].$$

Только что было доказано, что фактор - группа $A/C_A(g)$ является черниковской, так что и подгруппа [A, g] будет черниковской.

Лемма 5. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Предположим, что A – абелева p - подгруппа группы G Если $gC_G(A)$ – p - элемент фактор - группы $N_G(A)/C_G(A)$, то [A, g] – черниковская подгруппа.

Доказательство. Если [a, g] = 1 для любого элемента a ∈ A, то [A, g] = <1>, и все доказано. Поэтому предположим, что существует такой элемент $b_1 \in A$, что $[b_1, g] \neq 1$. Положим $B_1 = < b_1 >^{< g >}$. Подгруппа B_1 – конечна и $< g >$ – инвариантна. Обозначим через M_1 – максимальную подгруппу A, для которой $B_1 \cap M_1 = <1>$. Тогда фактор - группа A/M_1 имеет конечный нижний слой, а потому является черниковской. Поскольку порядок $|gC_G(A)|$ – конечен, то множество $\{M_1^x \mid x \in < g >\}$ является конечным Пусть

$$\{ M_1^x \mid x \in < g > \} = \{ U_1, \quad , U_m\}.$$

Тогда пересечение $C_1 = \cap_{x \in < g >} M_1^x = \cap_{1 \le j \le m} U_j$ является, очевидно, $< g >$ – инвариантной подгруппой и из теоремы Рэмака получаем вложение

$$A/C_1 \rightarrowtail \times_{1 \le j \le m} A/U_j.$$

Для любого элемента $x \in < g >$ имеет место изоморфизм $A/M_1^x \cong A/M_1^x$, который показывает, что A/U_j является черниковской для любого j, $1 \le j \le m$. Отсюда вытекает, что и A/C_1 будет черниковской.

Предположим, что существует такой элемент $b_2 \in C_1$, что $[b_2, g] \neq 1$. Положим $B_2 = < b_2 >^{< g >}$ Подгруппа B_2 – конечна, $< g >$ - инвариантна и $<1> = B_1 \cap B_2 = <1>$. Обозначим через M_2 – максимальную подгруппу A, для которой $B_1B_2 \cap M_2 = <1>$. Тогда фактор - группа A/M_2 имеет конечный нижний слой, а потому является черниковской. С помощью приведенных выше аргументов построим такую $< g >$ – инвариантную подгруппу C_2, что A/C_1 –

черниковская и $B_1B_2 \cap C_2 = <1>$. Если $[C_2, g] \neq <1>$, то продолжим начатый выше процесс. Если допустить, что этот процесс бесконечен, то построим бесконечное семейство $\{B_n \mid n \in N\}$ таких конечных $< g >$ - инвариантных подгрупп, что $[B_n, g] \neq <1>$, при любом $n \in N$, и $< B_n \mid n \in N > = \times_{n \in N} B_n$. Однако это противоречит лемме 3. Полученное противоречие показывает, что указанный процесс не может быть бесконечным. Это означает, что A включает в себя такую $< g >$ - инвариантную подгруппу E, что A/E – черниковская группа и $[E, g] = <1>$. Отсюда, как и в предыдущей лемме, можно показать, что подгруппа $[A, g]$ будет черниковской.

Следствие 1. Пусть G - группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Предположим, что A – абелева периодическая подгруппа группы G. Если $gC_G(A)$ – p - элемент фактор - группы $N_G(A)/C_G(A)$, где p - простое число, то $[A, g]$ – черниковская подгруппа.

Доказательство. В самом деле, имеем $A = \times_{q \in \Pi(A)} A_q$, где A_q – силовская q - подгруппа A, $q \in \Pi(A)$. Из леммы 3 получаем существование такого конечного подмножества $\pi \subseteq \Pi(A)$, что $[A_q, g] = 1$ для $q \in \Pi(A) \setminus \pi$. Если $q \in \pi$, $q \neq p$, то из леммы 4 вытекает, что $[A_q, g]$ – черниковская подгруппа. Если же $p \in \pi$, то из леммы 5 получаем, что подгруппа $[A_q, g]$ будет черниковской. Конечность множества π обеспечивает теперь тот факт, что и $[A, g]$ также будет черниковской.

Следствие 2. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Предположим, что A – абелева периодическая подгруппа группы G. Если $gC_G(A)$ – элемент конечного порядка фактор - группы $N_G(A)/C_G(A)$, то $[A, g]$ – черниковская подгруппа.

Доказательство. Так как $gC_G(A)$ имеет конечный порядок, то $gC_G(A) = g_1C_G(A) \cdot \ldots \cdot g_mC_G(A)$, где $g_jC_G(A)$ – p_j – элемент для некоторого простого числа p_j, $1 \leq j \leq m$. Из следствия 1 получаем, что $[A, g_j]$ – черниковская подгруппа для любого j, $1 \leq j \leq m$. Поскольку $[A, g] \leq [A, g_1] \ldots [A, g_m]$, то $[A, g]$ также будет черниковской подгруппой.

Следствие 3. Пусть G – группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Предположим, что A – абелева периодическая подгруппа группы G. Если $F/C_G(A)$ – конечная подгруппа фактор - группы $N_G(A)/C_G(A)$, то $[A, F]$ – черниковская подгруппа.

Доказательство. Так как $\{ g_1, \ldots, g_m \}$ – полный набор представителей всех смежных классов подгруппы F по $C_G(A)$, взятых по одному в каждом классе. Из следствия 2 получаем, что $[A, g_j]$ – черниковская подгруппа для любого j, $1 \leq j \leq m$. Поскольку $[A, F] \leq [A, g_1] \ldots [A, g_m]$, то $[A, F]$ также будет черниковской подгруппой.

Следствие 4. Пусть G – почти абелева группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Если G – периодическая группа, то ее коммутант будет черниковской подгруппой.

Доказательство. Пусть A – нормальная абелева подгруппа G, индекс которой конечен. Из следствия 3 получаем, что [A, G] – черниковская подгруппа. Фактор - группа G/[A, G] имеет центр конечного индекса, и по классической теореме И. Шура (см., например, [22, Теорема 1.2) ее коммутант конечен. Но тогда коммутант всей группы G будет черниковской подгруппой.

Доказательство теоремы. Поскольку группа G включает в себя подгруппу конечного индекса, имеющую черниковский коммутант, то она включает в себя нормальную подгруппу H с этим свойством. Положим K = [H, H], тогда H/K – абелева группа, а потому множество T/K всех ее элементов, имеющих конечный порядок, будет ее характеристической подгруппой. Фактор - группа H/T уже не имеет кручения, и из следствия 2 леммы 2 получаем включение $H/T \leq \zeta(G/T)$. Используя теперь теорему И. Шура [22, Теорема 1.2], получим конечность коммутанта D/T = [G/T, G/T]. Но тогда множество P/D всех элементов G/D, имеющих конечный порядок, будет ее характеристической подгруппой, фактор - группа по которой будет абелевой группой без кручения. Из такого выбора P/D вытекает, что P/K будет периодической G – инвариантной подгруппой. Предположим, что $H \neq T$. Это означает, что H/K содержит элемент x_1K, имеющий бесконечный порядок. Положим $X_1/K = \langle x_1K \rangle^{G/K}$, тогда X_1/K – конечно порожденная абелева G - инвариантная подгруппа. Поэтому найдется такое натуральное число n, что $Y_1/K = (X_1/K)^n$ – подгруппа без кручения, в частности, она будет свободной абелевой. Из ее выбора также вытекает, что она будет G – инвариантной. Если фактор - группа H/Y_1 – непериодическая, то используя приведенные только что рассуждения, найдем в ней G - инвариантную свободную абелеву подгруппу Y_2/Y_1, и т.д. В результате мы построим в H/K подгруппу U/K, которая обладает возрастающим рядом G - инвариантных подгрупп со свободными абелевыми факторами и фактор - группа H/U по которой уже периодическая. Очевидно, подгруппа U также будет G - инвариантной и не имеет кручения. Фактор - группа H/U уже периодическая, а потому G/U будет периодической почти абелевой группой. Из леммы 1 и следствия 4 леммы 5 получаем, что G/U имеет черниковский коммутант. Так как P/K – периодическая подгруппа, а U/K не имеет кручения, то $P \cap U = K$. Из теоремы Рэмака вытекает теперь вложение $G/K \rightarrowtail G/P \times G/U$. Поскольку G/P – абелева группа, то отсюда вытекает, что [G/K, G/K] – черниковская подгруппа. Учитывая теперь тот факт, что и K – черниковская подгруппа, получим наконец, что и [G, G] – черниковская подгруппа.

Библиографические ссылки

1. **Dedekind R.** Über Gruppen deren sammtliche Teiler Normalteiler sind. // Math. Annalen 48. – 1897. – P 548 – 561.

2. **Baer R.** Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe. // S.-B. Heidelberg Akad. – 1933. – P 12 – 17.
3. **Шмидт О.Ю.** Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп. / О.Ю. Шмидт // Матем. сб. № 33. –1926. – P 161 – 172.
4. **Шмидт О.Ю.** Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп. / О.Ю. Шмидт // Труды. Семинара по теории групп. – 1938. – P 7 – 26.
5. **Черников С.Н.** Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп. / С.Н. Черников // Укр. матем. ж. – 1967. – № 6. – P 111 – 131.
6. **Ромалис Г.М.** О метагамильтоновых группах I. / Г.М. Ромалис, Н.Ф. Сесекин // Матем. записки Уральского университета. – 1966. – T 5, № 3. – P 45 – 49.
7. **Сесекин Н.Ф.** О метагамильтоновых группах II. / Н.Ф. Сесекин, Г.М. Ромалис // Матем. записки Уральского университета. – 1968. – T 6, № 5. – P 50 – 53.
8. **Ромалис Г.М.** О метагамильтоновых группах III. / Г.М. Ромалис, Н.Ф. Сесекин // Матем. записки Уральского университета. – 1970. – T 7, № 3. – P 195 – 199.
9. **Нагребецкий В.Т.** Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна. / В.Т. Нагребецкий // Матем. записки Уральского университета. – 1967. – T 6, № 1. – P 80 – 88.
10. **Махнев А.А.** О конечных метагамильтоновых группах. / А.А. Махнев // Матем. записки Уральского университета. – 1976. – T 10, № 1. – P 60 – 75.
11. **Кузенный Н.Ф.** Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп./Н.Ф. Кузенный, Н.Н. Семко// Матем. Заметки. – 1983. – T 34, № 2. – P 179 – 188.
12. **Кузенний М.Ф.** Будова розв'язних метагамільтонових груп. / М.Ф. Кузенний, М.М. Семко // Доповіді АН Укр. РСР, сер. А. – 1985. – № 2. –P 6 – 9.
13. **Кузенный Н.Ф.** О строении непериодических метагамильтоновых групп. / Н.Ф. Кузенный, Н.Н. Семко // Известия вузов. Математика 1986. – T 11. – P 32 – 40.
14. **Кузенный Н.Ф.** Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом. / Н.Ф. Кузенный, Н.Н Семко // Укр. матем. ж. 1987. – T 39, № 2. – P 180 – 185.
15. **Кузенный Н.Ф.** О строении периодических неабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три. / Н.Ф. Кузенный, Н.Н. Семко // Укр. матем. ж. – 1989. – T 41, № 2. – P 170 – 176.
16. **Кузенный Н.Ф.** О метагамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два. / Н.Ф. Кузенный, Н.Н. Семко // Укр. матем. ж. – 1990 – T 42, № 2. – P 168 – 175.
17. **Семко Н.Н.** Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два. / Н.Н. Семко, Н.Ф. Кузенный // Укр. матем. ж. – 1987. – T 39, № 6. – P 743 – 750.
18. **Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G.** The local structure of groups whose non – normal subgroups have finite conjugacy classes. // Advanced in Group Theory 2002, Proceedings of the Intensive Bimester Dedicated to the Memory of Reinhold Baer, Napoly, May – June 2002, ARACNE: Roma. – 2003. – P 93 – 110
19. **Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G.** Groups whose non – normal subgroups have finite conjugate classes. // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, December 2004. – 104A. – № 2. – P 177 – 189
20. **Фукс Л.** Бесконечные абелевы группы. / Л. Фукс / Москва. –1974. – T. 1. – 337 с.
21. **Kurdachenko L., Otal J., Subbotin I.** Artinian modules over group rings. // Frontiers in Mathematics. **BIRKHÄUSER**: Basel – 2007. – 248 p.
22. **Tomkinson M.J.** FC – groups. / **PITMAN**: Boston – 1984. – 171p.

Надійшла до редколегії 11. 12. 08.

УДК 517.9

O.P. Kogut*, P.I. Kogut**, T.N. Rudyanova***

**Institute of Applied System Analysis, National Technical University —KPI*
*** Oles Gonchar Dnipropetrovsk National University*
****Dnipropetrovsk State Finance Academy*

A NOTE ON H-CONVERGENCE

Вивчаються властивості H-збіжності для послідовності рівномірно обмежених квадратних матриць $\{A_\varepsilon \in L^\infty(D;R^{n\times n})\}_{\varepsilon>0}$. Отримано достатні умови, які гарантують збіг H-границі з *-слабкою границею в $L^\infty(D;R^{n\times n})$ таких послідовностей.

Introduction. The aim of this paper is to discuss some additional properties of the H-convergence, which plays the key role in the homogenization theory of boundary value problems. So, the main object of our consideration is a sequence $\{A_\varepsilon(x)=[a_{ij}(x)]\}_{\varepsilon>0}$ of the uniformly coercive and bounded matrices $A_\varepsilon \in L^\infty(\Omega;R^{n\times n})$. We suppose that this sequence is compact with respect to the H-convergence (see definition given belove). Let $A_0 \in L^\infty(\Omega;R^{n\times n})$ be its H-limit. Since the sequence $\{A_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ is uniformly bounded in $L^\infty(\Omega;R^{n\times n})$, by Banach-Alaoglu Theorem it follows that there exists a matrix $A^* \in L^\infty(\Omega;R^{n\times n})$ such that (up to a subsequence) $A_\varepsilon \xrightarrow{w} A^*$ weakly-* in $L^\infty(\Omega;R^{n\times n})$. The question is to find conditions which would guarantee the equality $A_0=A^*$ almost everywhere in Ω. Note that the answer is obvious in the case when

$$A_\varepsilon \in L^\infty(\Omega,R^{n\times n})\bigcap W^{1,2}(\Omega,R^{n\times n}) \text{ for every } \varepsilon>0$$

and the sequence $\{A_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ is uniformly bounded in the Sobolev space $W^{1,2}(\Omega,R^{n\times n})$. However, in general, the equality $A_0=A^*$ may be failed. This is the main reason why the optimal control problems in coefficients and shape optimization problems for systems governed by partial differential equations have no solutions in general (see, for instance, [1; 3; 7 – 9]).

1. Notation and Preliminaries. Throughout the paper Ω is abounded open subset of R^n with $n\ge 1$. The space $D'(\Omega)$ of distributions in Ω is the dual of the space $C_0^\infty(\Omega)$. For two real numbers $1<p<+\infty$, $1<q<+\infty$ such that $1/p+1/q=1$, the space $W_0^{1,p}(\Omega)$ is the closure of $C_0^\infty(\Omega)$ in the Sobolev space $W_0^{1,p}(\Omega)$, while $W_0^{-1,q}(\Omega)$ is the space of all distributions of the form $f = f_0 + \sum_j D_j f_j$, with $f_0, f_1, \ldots, f_n \in L^q(\Omega)$ (i.e. $W_0^{-1,q}(\Omega)$ is the dual space of $W_0^{1,p}(\Omega)$. For any vector field $\vec{\upsilon} \in L^p(\Omega) = L^p(\Omega, R^n)$, the divergence is an element of the space $W_0^{-1,q}(\Omega)$ defined by the formula

$$\langle div\,\vec{\upsilon}, \varphi \rangle_{W^{-1,q}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = -\int_\Omega (\vec{\upsilon}, D\varphi)_{R^n}\, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{2.1}$$

where $\langle \cdot,\cdot \rangle_{W^{-1,q}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)}$ denotes the duality pairing between $W_0^{-1,q}(\Omega)$ and $W_0^{1,p}(\Omega)$ and $\langle \cdot,\cdot \rangle_{R^n}$ denotes the scalar product of two vectors in R^n.

A vector field $\vec{\upsilon}$ is said to be solenoidal, if $div\,\vec{\upsilon} = 0$. For any vector field $\vec{\upsilon} \in L^p(\Omega)$ the relations

$$\langle curl\ \vec{\upsilon}, \varphi \rangle^{ij}_{W^{-1,q}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = -\int_\Omega (\upsilon_i, D_j\varphi - \upsilon_j, D_i\varphi)dx,$$
$$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

define a skew-symmetric matrix $curl\,\vec{\upsilon}$, whose elements belong to the space $W^{-1,q}(\Omega)$. A vector field $\vec{\upsilon}$ is said to be vortex-free, if $curl\,\vec{\upsilon} = 0$. We say that a vector field $\vec{\upsilon} \in L^p(\Omega)$ is potential, if $\vec{\upsilon}$ can be represented in the form $\vec{\upsilon} = Du$, where $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Obviously, any potential vector is vortex-free. In the case when a vector field $\vec{\upsilon}$ smooth, the divergence $div\ \vec{\upsilon}$ and the $curl\,\vec{\upsilon}$ are defined as usual, that is,

$$div\,\vec{\upsilon} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_i}, \quad (curl\,\vec{\upsilon})_{ij} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}.$$

We will also need to take the divergence and the curl of matrices, and then the above definitions can be applied to the row vectors, i.e., to the last index. Thus, with $M = (M_{ij})$ and $P = (P_{ij})$, we have

$$(div\,P)_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \qquad (curl\,M)_{ijk} = \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_j}.$$

Let us fix two constants α and β such that $0<\alpha\leq\beta<+\infty$. We define $M_\alpha^\beta(\Omega)$ as a set of all matrices $A=[a_{ij}]$ in $L^\infty(\Omega;R^{n\times n})$ such that

$$A(x)\geq\alpha I\,,\;\;(A(x))^{-1}\geq\beta^{-1}I\,,\quad \text{a e. in } \Omega. \tag{2.2}$$

In (2.2) I is the identity matrix in $R^{n\times n}$, and the above inequalities are in the sense of the quadratic forms defined by $(A\xi,\xi)_{R^n}$ for $\xi\in R^n$. Note that (2.2) implies the inequality

$$|A(x)|\leq\beta \text{ a.e. in } \Omega \tag{2.3}$$

and that necessarily $\alpha\leq\beta$.

Throughout the paper ε denotes a small parameter which varies in a strictly decreasing sequence of positive numbers converging to 0. When we write $\varepsilon>0$, we consider only the elements of this sequence, while when we write $\varepsilon\geq 0$ we also consider its limit $\varepsilon=0$.

2. The definition of *H*-convergence. In this section we recall the notion of *H*-convergence introduced by Luc Tartar in 1977 (see[11]) and later developed by Francois Murat and L. Tartar (see [10]). Let $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ be a sequence of matrices in $M_\alpha^\beta(\Omega)$ which are not necessarily symmetric.

DEFINITION 3.1. *A sequence $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ in $M_\alpha^\beta(\Omega)$ is said to be H-convergent to $A\in M_\alpha^\beta(\Omega)$ (in the symbol, $A_\varepsilon\xrightarrow{H}A$) as $\varepsilon\to\infty$, if the following condition holds. Whenever vector fields $\vec{d}_\varepsilon,\vec{d},\vec{\upsilon}_\varepsilon,\vec{\upsilon}\in L^2(\Omega)$ satisfy*

$$\vec{d}_\varepsilon=A_\varepsilon,\vec{\upsilon}_\varepsilon,\quad\forall\varepsilon>0, \tag{3.1}$$

$$\vec{d}_\varepsilon\to\vec{d}\;\; \textit{weakly in } L^2(\Omega), \tag{3.2}$$

$$\vec{\upsilon}_\varepsilon\to\vec{\upsilon}\;\; \textit{weakly in } L^2(\Omega), \tag{3.3}$$

$$\{div\,\vec{d}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \textit{ is relatively compact in } W^{-1,2}(\Omega), \tag{3.4}$$

$$\{curl\,\vec{\upsilon}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \textit{ is relatively compact in } W^{-1,2}(\Omega;R^{n\times n}), \tag{3.5}$$

then

$$\vec{d}=A\vec{\upsilon}. \tag{3.6}$$

It can be proved that the above definition of *H*-convergence is equivalent to the slightly different definition given in [10], concerning the limit behavior of the elliptic equations governed by matrix A_ε. Namely,

DEFINITION 3.2. *A sequence $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ of matrices in $M_\alpha^\beta(\Omega)$ H-converges to a matrix $A\in M_\alpha^\beta(\Omega)$ if for every $f\in W^{-1,2}(\Omega)$ the sequence $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ of the solutions to the Dirichlet problems*

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega), \\ -div(A_\varepsilon Du_\varepsilon) = f \text{ in } D'(\Omega) \end{cases}, \tag{3.7}$$

satisfies

$$u_\varepsilon \to u \text{ weakly in } W_0^{1,2}(\Omega),$$

$$A_\varepsilon Du_\varepsilon \to ADu \text{ weakly in } L^2(\Omega, R^n),$$

where u is the solution to the problem

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,2}(\Omega), \\ -div(ADu) = f \text{ in } D'(\Omega) \end{cases}. \tag{3.8}$$

The principle features of H-convergence we may attribute to the following well-know properties:

1) the H-limit of H-converging sequence is unique;

2) the set $M_\alpha^\beta(\Omega)$ is sequentially compact with respect to the H-convergence;

3) H-convergence is stable under the transposition of the matrices;

4) if $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset M_\alpha^\beta(\Omega)$, $A_\varepsilon \xrightarrow{H} A$, $B_\varepsilon \xrightarrow{H} B$ and for some open set $U \subset \Omega$ one has $A_\varepsilon = B_\varepsilon$ in U for every $\varepsilon > 0$, then $A = B$ in U.

The natural question is what is the relation between H-limit of a bounded sequence $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ and its weak-* limit in $L^\infty(\Omega; R^{n\times n})$. As follows from the classical example, presented in the next section, in general, these limits may be drastically different.

4. One-dimensional case. Let $\Omega = (0,1)$. Let $a \in L^\infty(\Omega)$ be a positive function such that

$$0 < \alpha \le a(x) \le \beta < +\infty \text{ a.e. in } \Omega. \tag{4.1}$$

Assume that a is periodic with the period T. Set $a_\varepsilon = a(x/\varepsilon)$. Consider the particular case of the boundary value problem (6.3)

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(a_\varepsilon \dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right) = f \text{ in } \Omega, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

For each $\varepsilon > 0$ this problem has a unique solution $u_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega)$. First of all we will show that the sequence $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ has a limit in the weak topology of $u_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Indeed, as follows from (4.2), after multiplication by u_ε, integration by parts, and use of (4.1), one has

$$\alpha\left\|\frac{du_\varepsilon}{dx}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

Hence

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{du_\varepsilon}{dx}\right\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.3}$$

where the Poincare constant C is independent of ε. Thus the sequence of solutions $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ is relatively compact with respect to the weak topology of $W_0^{1,2}(\Omega)$. To identify its limit we note that from (4.1) and (4.3), it follows that there exists a subsequence, still denoted by ε, such that

$$\begin{cases} u_\varepsilon \xrightarrow{w} u & \text{weakly in } L^2(\Omega), \\ \dfrac{du_\varepsilon}{dx} \xrightarrow{w} \dfrac{du}{dx} & \text{weakly in } L^2(\Omega), \\ \xi_\varepsilon \xrightarrow{w} \xi & \text{weakly in } L^2(\Omega), \\ a_\varepsilon \xrightarrow{w} a^0 & \text{weakly - * in } L^\infty(\Omega), \end{cases} \tag{4.4}$$

where $\xi_\varepsilon = a_\varepsilon du_\varepsilon / dx$, a^0 is the mean value of a. Here we used the fact that by the periodicity of a_ε, we have

$$a^0 = \langle a \rangle := \frac{1}{T}\int_0^T a(x)dx.$$

Moreover, from (4.2) we derive that at the limit,

$$\frac{d}{dx}\xi = f \text{ in } \Omega. \tag{4.5}$$

As was mentioned above, from (4.4) we have $u_\varepsilon \xrightarrow{w} u$ weakly in $W_0^{1,2}(\Omega)$ which implies, by continuity of the trace operator, that $u(0)=u(1)= 0$. Now we establish the relation between ξ and u. Clearly, from (4.1)–(4.3), since $f \in L^2(\Omega)$, we have a priori estimate

$$\|\xi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{d\xi_\varepsilon}{dx}\right\|_{L^2(\Omega)} \le C,$$

where C is independent of ε. Consequently, and using the Rellich-Kondrashov theorem, one has

$$\xi_\varepsilon \xrightarrow{w} \xi \text{ weakly in } W_0^{1,2}(\Omega), \text{hence strongly in } L^2(\Omega).$$

Notice that ξ_ε is the product of two weakly converging quantities. In general, this does not imply that the limit ξ is the product of the weak limits a^0 and du/dx. To begin with, we remember that

$$\frac{du_\varepsilon}{dx} = \frac{1}{a_\varepsilon}\xi_\varepsilon. \tag{4.6}$$

where $0 < \dfrac{1}{\beta} \le \dfrac{1}{a_\varepsilon} \le \dfrac{1}{\alpha} < +\infty$, and so, by periodicity,

$$\frac{1}{a_\varepsilon} \xrightarrow{w} \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{a(x)}dx \text{ weakly in } L^\infty(\Omega).$$

Since the term $(1/a_\varepsilon)\xi_\varepsilon$ is the product of the weakly convergent quantity $1/a_\varepsilon$ by the strongly convergent one ξ_ε, its limit is the product of the limits of $1/a_\varepsilon$ and ξ_ε. Thus

$$\frac{1}{a_\varepsilon}\xi_\varepsilon \xrightarrow{w} \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \xi \text{ weakly in } L^2(\Omega). \tag{4.7}$$

Consequently, from (4.6), we have $\frac{du}{dx} = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \xi$. Now making use of (16), it follows that u is the solution of the limit boundary value problem

$$\begin{cases} -\left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle^{-1} \dfrac{d^2u}{dx^2} = f \ in\ \Omega, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

This problem has a unique solution, so the whole sequence $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converges to u weakly in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Thus, due to the Definition 3.2, we come to following conclusion:

$$a_\varepsilon \xrightarrow{H} \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle^{-1},$$

whereas $a_\varepsilon \xrightarrow{w} \langle a \rangle$ weakly-* in $L^\infty(\Omega)$. However, in general, $\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle^{-1} \neq \langle a \rangle$, and we obtain the required.

5. The nonlinear Dirichlet problem. We begin with the more precise description of our main object. For a fixed matrix $A \in M_\alpha^\beta(D)$ and a real number $1 < p < +\infty$, we define the mapping a: $R^n \times R^n \mapsto R^n$ as follows

$$a(x,\zeta) = A(x)|\zeta|^{p-2}\zeta.$$

Then (see, for instance, [2], [4]) there exist two constants c_0, c_1 with $0 < c_0 \le c_1 < +\infty$ such that, a.e. in R^n and for every $\zeta_1, \zeta_2 \in R^n$, we have

in the case $2 \le p < +\infty$

$$(a(x,\zeta_1) - a(x,\zeta_2), \zeta_1 - \zeta_2)_{R^n} \ge c_0|\zeta_1 - \zeta_2|_{R^n}^p \tag{5.1}$$

$$|(a(x,\zeta_1) - a(x,\zeta_2)|_{R^n} \le c_1(|\zeta_1|_{R^n} + |\zeta_2|_{R^n})^{p-2}|\zeta_1 - \zeta_2|_{R^n} \tag{5.2}$$

in the case $1 < p \le 2$

$$(a(x,\zeta_1) - a(x,\zeta_2), \zeta_1 - \zeta_2)_{R^n} \ge c_0(|\zeta_1|_{R^n} + |\zeta_2|_{R^n})^{p-2}|\zeta_1 - \zeta_2|_{R^n}^2, \tag{5.3}$$

$$|(a(x,\zeta_1) - a(x,\zeta_2)|_{R^n} \le c_1(|\zeta_1 - \zeta_2|_{R^n}^{p-1}. \tag{5.4}$$

In particular (5.1)–(5.4) imply that a.e. in R^n and for any $\zeta \in R^n$:

$$(a(x,\zeta),\zeta)_{R^n} \geq c_0|\zeta|^p_{R^n}, \quad |a(x,\zeta)|_{R^n} \leq c_1|\zeta|^{p-1}_{R^n}. \tag{5.5}$$

Since $A \in M_\alpha^\beta(D)$ it is easy to verify that (5.1)–(5.4) are satisfied with

$$c_0 = 2^{2-p}\alpha \text{ and } c_1 = (p-1)\beta \text{ for } p \geq 2 \text{, and}$$

$$c_0 = \alpha,\ c_1 = 2^{2-p}\beta \text{ for } p \leq 2.$$

As a result, for a given function $a_0 \in L^\infty(D)$ such that $a_0(x) \geq 0$ a.e. in D, the operator

$$Ay = -div(a(x,Dy)) + a_0(x)|y|^{p-2}y$$

defined via the paring

$$\langle Ay,\upsilon\rangle_{W^{-1,q}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega (A(x)|Dy|^{p-2}_{R^n}Dy, D\upsilon)_{R^n}dx +$$

$$+\int_\Omega a_0(x)|y|^{p-2}y\upsilon\,dx \quad \forall y,\upsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

turns out to be coercive, strictly monotone from $W_0^{1,p}(\Omega)$ into its dual $W_0^{-1,q}(\Omega)$, and demi-continuous in the following sense: $y_k \to y_0$ strongly in $W_0^{1,p}(\Omega)$ implies that $A_{yk} \to A_{y0}$ weakly in $W_0^{-1,q}(\Omega)$ (see [5], [6]). Then by well-known existence results for nonlinear elliptic equations with strictly monotone demi-continuous coercive operators (see [5], [12]), one can easily see that for every open set Ω and every $f \in L^q(\Omega)$ the nonlinear Dirichlet boundary value problem

$$Ay = f \ \ in\ \Omega,\ y \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{5.6}$$

has a unique weak solution in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Let us recall that a function y is the weak solution of (5.6) if

$$y \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{5.7}$$

$$\int_\Omega (A(x)|Dy|^{p-2}_{R^n}Dy, D\upsilon)_{R^n}dx + \int_\Omega a_0(x)|y|^{p-2}y\upsilon\,dx = \int_\Omega f\upsilon\,dx \ \ \forall \upsilon \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.8}$$

Following [2], [4], we conclude this section by some results concerning the estimates for the solution of Dirichlet problem (5.6).

PROPOSITION 5.1. *For every $A \in M_\alpha^\beta(D)$, $a_0 \in L^\infty(D)$ ($a_0(x) \geq 0$ a.e. in D), and $f \in W^{-1,q}(\Omega)$ the unique weak solution y_A to the problem (5.6) satisfies the estimates:*

$$\int_\Omega |Dy_A|^p_{R^n}dx \leq C\|f\|^q_{W^{-1,q}(\Omega)}, \quad \|y_A\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \tag{5.9}$$

where C is a constant depending only on p, α, and β.

6. The main result. In this section we introduce a class of matrices $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$, as a subset of $M_\alpha^\beta(\Omega)$, for which the H-limit and weak-$*$ limit in $L^\infty(\Omega;R^{n\times n})$ are the same. Let ξ_1, ξ_2 be given functions of $L^\infty(D)$ such that $0<\xi_1(x)<\xi_2(x)$ a. e. in Ω. Let $\{Q_1,\dots Q_n\}$ be a collection of nonempty compact subsets of $W^{-1,q}(\Omega)$. To define the class of admissible matrices, we introduce the following set

$$U_{sol}=\{A=[\vec{a}_1,\dots\vec{a}_n]\in M_\alpha^\beta(\Omega)\,|\,div\,\vec{a}_i\in Q_i,\ \forall i=1,\dots n\} \tag{6.1}$$

assuming that $U_{sol}\subset L^\infty(\Omega;R^{n\times n})$ is a nonempty set.

DEFINITION 6.1. *We say that a matrix $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ is admissible to the nonlinear Dirichlet problem (5.6) if $A\in U_{sol}$.*

To begin with, we prove the following result:

PROPOSITION 6.2. *The set U_{sol} is sequentially compact with respect to the weak-$*$ topology of $L^\infty(\Omega;R^{n\times n})$.*

Proof. Let $\{A_k=[\vec{a}_{1k},\dots\vec{a}_{nk}]\}_{k\in N}\subset U_{sol}$ be an arbitrary sequence of admissible matrices. Since $U_{sol}\subset M_\alpha^\beta(\Omega)$ and $M_\alpha^\beta(\Omega)$ is the sequentially weakly-$*$ compact subset of $L^\infty(\Omega;R^{n\times n})$, we may suppose that there exist a matrix $A_0=[\vec{a}_{10},\dots\vec{a}_{n0}]\in M_\alpha^\beta(\Omega)$ and elements $f_i\in Q_i$, $i=1,\dots n$ such that

$$\int_\Omega(\vec{a}_{ik},\phi)_{R^n}\,dx\xrightarrow{k\to\infty}\int_\Omega(\vec{a}_{i0},\phi)_{R^n}\,dx,\ \forall\phi\in L^1(\Omega)=L^1(\Omega,R^n),\ \ \forall i=1,2,\dots n \tag{6.2}$$

and

$$div\,\vec{a}_{ik}\xrightarrow{k\to\infty}f_i\ \text{in}\ W^{-1,q}(\Omega)\ \ \forall i=1,2,\dots n. \tag{6.3}$$

It remains to prove that

$$div\,\vec{a}_{i0}=f_i\ \text{for all}\ i=1,2,\dots n.$$

To do this, we choose ϕ in (6.2) as a potential vector, that is, $\phi=D\upsilon$, where $\upsilon\in W_0^{1,p}(\Omega)$. Then, in view of (2.1), the relation (6.3) implies

$$\int_\Omega(\vec{a}_{ik},D\upsilon)_{R^n}\,dx=-\langle div\,\vec{a}_{ik},\upsilon\rangle_{W^{-1,q}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)}$$
$$\xrightarrow{k\to\infty}-\langle f_i,\upsilon\rangle_{W^{-1,q}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)}\ \ \forall i=1,\dots,n.$$

Using this and relation (6.2),we finally get

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega(\vec{a}_{ik},D\upsilon)_{R^n}\,dx=\int_\Omega(\vec{a}_{i0},D\upsilon)_{R^n}\,dx$$
$$=-\langle div\,\vec{a}_{i0},\upsilon\rangle_{W^{-1,q}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)}=-\langle f_i,\upsilon\rangle_{W^{-1,q}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)}\ \forall i=1,\dots,n.$$

As a result, we have $A_0=[\vec{a}_{10},\dots\vec{a}_{n0}]\in U_{sol}$. This concludes the proof. □

In what follows, we make use of the following result (for the proof we refer to [13]).

LEMMA 6.3. *Let* $\{\vec{f}_k\}_{k\in N}\subset L^q(\Omega)$, $\{\vec{g}_k\}_{k\in N}\subset L^p(\Omega)$ *be the bounded sequences of vector-functions such that*

$$\vec{f}_k \xrightarrow{w} \vec{f}_0 \text{ in } L^q(\Omega) \text{ and } \vec{g}_k \xrightarrow{w} \vec{g}_0 \text{ in } L^p(\Omega).$$

If

$$\{div\,\vec{f}_k\}_{k\in N} \text{ is compact with respect to the strong topology of } W^{-1,q}(\Omega), \tag{6.4}$$

and

$$curl\,\vec{g}_k = 0 \;\; \forall k\in N, \tag{6.5}$$

then

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \phi(\vec{f}_k,\vec{g}_k)_{R^n}\,dx = \int_\Omega \phi(\vec{f}_0,\vec{g}_0)_{R^n}\,dx,\; \forall\phi\in C_0^\infty(D). \tag{6.6}$$

REMARK 6.4. *The equality (6.6) can be interpreted as the weak-$*$ convergence in* $L^1(\Omega)$ *of the sequence* $\{(\vec{f}_k,\vec{g}_k)_{R^n}\}_{k\in N}$ *to the element* $(\vec{f}_0,\vec{g}_0)_{R^n}$.

Let us denote by $\Xi\subset L^\infty(\Omega;R^{n\times n})\times W_0^{1,p}(\Omega)$ the set of all admissible pairs (A,y_A): matrix and the corresponding solution to the boundary value problem (5.7)–(5.8). Now we are in a position to study the topological properties of this set. Let τ be the topology on the set $L^\infty(\Omega;R^{n\times n})\times W_0^{1,p}(\Omega)$ which we define as the product of the weak-$*$ topology of $L^\infty(\Omega;R^{n\times n})$ and the weak topology of $W_0^{1,p}(\Omega)$.

THEOREM 6.5. *For every* $f\in W^{-1,q}(\Omega)$ *the set* Ξ *is sequentially τ-closed.*

Proof. Let $\{(A_k,y_k)\}_{k\in N}\subset\Xi$ be any τ-convergent sequence. Let (A_0,y_0) be its τ-limit. Our aim is to prove that $(A_0,y_0)\in\Xi$. Let us set

$$\Im(A,y) = -div(A(x)|Dy|_{R^n}^{p-2}Dy) + a_0(x)|y|^{p-2}y = \Im_1(A,y)+\Im_2(A,y),$$

$$\Im_1(A,y) = -div(A(x)|Dy|_{R^n}^{p-2}Dy) = -div\,a(A(x),Dy).$$

By Proposition 6.2 and the initial assumptions, we have $A_0\in U_{sol}$, therefore,

$$A_k \xrightarrow{w} A_0 = [\vec{a}_{10},\ldots\vec{a}_{n0}] \text{ weakly-}*\text{ in } L^\infty(\Omega;R^{n\times n}). \tag{6.7}$$

$$div\,\vec{a}_{ik}\to div\,\vec{a}_{i0} \text{ strongly in } W^{-1,q}(\Omega),\; \forall i=1,\ldots n. \tag{6.8}$$

$$y_k \xrightarrow{w} y_0 \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega). \tag{6.9}$$

Hence

$$\{|Dy_k|_{R^n}^{p-2}Dy_k\}_{k\in N} \text{ is bounded in } L^q(\Omega),\quad q=p/(p-1),$$

$$\{|y_k|^{p-2}y_k\}_{k\in N} \text{ is bounded in } L^q(\Omega), \tag{6.10}$$

$$y_k \to y_0 \text{ in } L^p(\Omega), \qquad y_k(x) \to y_0(x) \text{ a.e. in } \Omega. \tag{6.11}$$

Then, by (6.11) and monotonicity of the function $g(\zeta)=|\zeta|^{p-2}\zeta$, we have

$$|y_k|^{p-2} y_k \to |y_0|^{p-2} y_0 \text{ almost everywherein } \Omega.$$

Using this and (6.10), we conclude (see[6])

$$|y_k|^{p-2} y_k \xrightarrow{w} |y_0|^{p-2} y_0 \text{ in } L^q(\Omega).$$

Consider the following sequence

$$\{f_k := f - a_0|y_k|^{p-2} y_k\}_{k\in N}.$$

It is clear that $f_k \in W^{-1,q}(\Omega)\ \forall k \in N$ and since the embedding $L^q(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega)$ is compact it follows that

$$f_k \to f_0 = f - a_0|y_0|^{p-2} y_0 \text{ strongly in } W^{-1,q}(\Omega). \tag{6.12}$$

In view of this and the fact that

$$-\operatorname{div} a(A_k(x), Dy_k) = f_k \text{ in } \Omega,\ \forall k \in N,$$

we come to the conclusion (see (5.1)–(5.5)): $\{a(A_k(x), Dy_k\}_{k\in N}$ is the bounded sequence in $L^q(\Omega)$. So, passing to a subsequence, we may assume that there exists a vector-function $\vec{\xi} \in L^q(\Omega)$ such that

$$a(A_k(x), Dy_k) = A_k|Dy_k|_{R^n}^{p-2} Dy_k =: \vec{\xi}_k \xrightarrow{w} \vec{\xi} \text{ in } L^q(\Omega). \tag{6.13}$$

As a result, the limit passage in the relation as $k\to\infty$ (in the sense of the distributions)

$$-\operatorname{div}\vec{\xi}_k = f - a_0|y_k|^{p-2}|y_k|, \text{ in } D'(\Omega)$$

gets

$$-\operatorname{div}\vec{\xi} = f - a_0|y_0|^{p-2}|y_0|, \text{ in } D'(\Omega) \tag{6.14}$$

It remains only to show that

$$\vec{\xi} = A_0|Dy_0|_{R^n}^{p-2} Dy_0.$$

To do so, we consider the scalar function

$$\upsilon(x) = (z, x)_{R^n}, \tag{6.15}$$

where z is a fixed element of R^n. Since the operator $\Im_1$ is strictly monotone, it follows that for every $z \in R^n$ and every positive function $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, we have

$$\int_\Omega \phi(x)(a(A_k, Dy_k) - a(A_k, D\upsilon), Dy_k - D\upsilon)_{R^n}\, dx \geq 0,$$

or, taking into account (6.15), this inequality can be rewritten as

$$\int_\Omega \phi(x)(a(A_k, Dy_k) - a(A_k, z), Dy_k - z)_{R^n}\, dx \geq 0. \tag{6.16}$$

Our next intention is to pass to the limit in (6.16) as $k\to\infty$ using Lemma 6.3. Since

$$\left.\begin{array}{c}-div\,a(A_k,Dy_k)\to f-a_0|y_0|^{p-2}|y_0| \text{ strongly in } W^{-1,q}(\Omega),\\ curv(Dy_k-z)=curv\,Dy_k=0,\ \forall k\in N,\end{array}\right\} \tag{6.17}$$

it remains to show that the sequence $\{div\,a(A_k,z)\}_{k\in N}$ is compact with respect to the strong topology of $W^{-1,q}(\Omega)$.

Indeed, for every $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, we have

$$\langle -div\,a(A_k,z),\phi\rangle_{W^{-1,q}(\Omega);W_0^{1,p}(\Omega)}=\int_\Omega (a(A_k,z),D\phi)_{R^n}\,dx$$

$$=\int_\Omega (A_k(x)|z|_{R^n}^{p-2}z,D\phi)dx=|z|^{p-2}\int_\Omega\left(\begin{bmatrix}(\bar a_{1k}(x),z)_{R^n}\\ \cdots\\ (\bar a_{nk}(x),z)_{R^n}\end{bmatrix},D\phi\right)_{R^n}dx$$

$$=|z|_{R^n}^{p-2}\int_\Omega\sum_{i=1}^n(\bar a_{ik}(x),z)_{R^n}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dx=|z|_{R^n}^{p-2}\int_\Omega\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^k(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}z_j dx$$

$$=|z|_{R^n}^{p-2}\sum_{i=1}^n z_j\int_\Omega(\bar a_{ik}(x),D\phi)_{R^n}dx$$

$$=-|z|_{R^n}^{p-2}\sum_{j=1}^n z_j\langle div\,\bar a_{jk},\phi\rangle_{W^{-1,q}(\Omega);W_0^{1,p}(\Omega)}=J_k\,, \tag{6.18}$$

Then using (6.8), we get

$$\lim_{k\to\infty}J_k=|z|_{R^n}^{p-2}\sum_{j=1}^n z_j\lim_{k\to\infty}\langle -div\,\bar a_{jk},\phi\rangle_{W^{-1,q}(\Omega);W_0^{1,p}(\Omega)}=$$

$$=|z|_{R^n}^{p-2}\sum_{j=1}^n z_j\langle -div\,\bar a_{j0},\phi\rangle_{W^{-1,q}(\Omega);W_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{6.19}$$

Making the converse transformations with (6.19) as we did it in (6.18), we come to the relation

$$\lim_{k\to\infty}\langle -div\,a(A_k,z),\phi\rangle_{W^{-1,q}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)}=\langle -div\,a(A_0,z),\phi\rangle_{W^{-1,q}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{6.20}$$

Since for every $i=1,\dots n$ the sequences $\{div\,\bar a_{ik}\}_{k\in N}$ are strongly convergent in $W^{-1,q}(\Omega)$, from (6.18)–(6.20) it follows that

$$\lim_{k\to\infty}\langle -div\,a(A_k,z),\phi_k\rangle_{W^{-1,q}(\Omega),W_0^{1,p}(\Omega)}=\langle -div\,a(A_0,z),\phi\rangle_{W^{-1,q}(\Omega);W_0^{1,p}(\Omega)} \tag{6.21}$$

for each sequence $\{\phi_k\}_{k\in N} \subset C_0^\infty(\Omega)$ such that $\phi_k \xrightarrow{w} \phi$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Thus, summing up the above results, we obtain

$$\left.\begin{array}{l} div\, a(A_k, z) \to div\, a(A_0, z) \text{ strongly in } W^{-1,q}(\Omega), \\ a(A_k, z) = A_k |z|_{R^n}^{p-2} z \xrightarrow{w} A_0 |z|_{R^n}^{p-2} z \text{ weakly} -* \text{ in } L^\infty(\Omega). \end{array}\right\}. \tag{6.22}$$

As a result, combining properties (6.17) and (6.22), it has been shown that all suppositions of Lemma 6.3 are fulfilled. So, taking into account (6.9), (6.17), (6.22), and passing to the limit in inequality (6.16) as $k \to \infty$, we get

$$\int_\Omega \phi(x)(\xi - a(A_0, z), Dy_0 - z)_{R^n}\, dx \geq 0, \quad \forall z \in R^n$$

for all positive $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. After localization, we have

$$(\xi - a(A_0, z), Dy_0 - z)_{R^n}, \quad \forall z \in R^n.$$

Since the operator $\Im_1$ is strictly monotone, it follows that

$$\xi = a(A_0, Dy_0) = A_0(x)|Dy_0|_{R^n}^{p-2} Dy_0. \tag{6.23}$$

Therefore, equation (6.14) takes the form

$$-div(A_0(x)|Dy_0|_{R^n}^{p-2} Dy_0) + a_0|y_0|^{p-2}|y_0| = f \text{ in } D'(\Omega).$$

Hence the τ-limit pair (A_0, y_0) is an admissible to the problem (5.7)–(5.8), and this concludes the proof.□

As an obvious consequence of this theorem (see (6.7), (6.9), (6.13), and (6.23)), we have the following result:

COROLLARY 6.6. *Let $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ be a sequence of matrices in $U_{sol} \subset M_\alpha^\beta(\Omega)$. Let $A^* \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ be its weak-* limit in $L^\infty(\Omega; R^{n\times n})$. Then for every $f \in W^{-1,q}(\Omega)$ the sequence $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ of the solutions to the Dirichlet problems*

$$\left\{\begin{array}{l} u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ -div(A_\varepsilon(x)|Du_\varepsilon|_{R^n}^{p-2} Du_\varepsilon) + a_0(x)|u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon = f \text{ in } D'(\Omega), \end{array}\right. \tag{6.24}$$

satisfies

$$u_\varepsilon \to u \text{ weakly in } W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$A_\varepsilon |Du_\varepsilon|_{R^n}^{p-2} Du_\varepsilon \to A^* |Du|_{R^n}^{p-2} Du \text{ weakly in } L^q(\Omega, R^n),$$

where u is the solution to the problem

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,2}(\Omega), \\ -div(A^*(x)|Du_\varepsilon|_{R^n}^{p-2} Du) + a_0(x)|u|^{p-2} u = f \text{ in } D'(\Omega). \end{array}\right. \tag{6.25}$$

Thus, in the case when $p=2$, we just come to the desired result: H-convergence of any sequence of matrices $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset U_{sol}$ is equivalent to its convergence with respect to the weak-$*$ topology of $L^\infty(\Omega; R^{n\times n})$.

References

1 **Bucur D., Buttazzo G.**, Variational Methodth in Shape Optimization Problems, Birkhauser, Boston: in Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, volume 65, 2005.
2 **Bucur D., Trebeschi P.**, Shape optimization problem governed by nonlinear state equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Ser. A, 128(1998), 943–963.
3 **C. Calvo-Jurado, J. Casado-Daz**, Optimization by the homogenization method for nonlinear elliptic Dirichlet problems, Mediterranian J. of Mathematic, 4(2007), 53-63.
4 **Dal Maso G., Murat F.**, Asymproric behaviour and correctors for Dirichlet problem in perforated domains with homogeneous monotone operators, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl.Sci., no. 4, 24(1997), 239-290.
5 **Gaevskii H., Greger K., Zaharias K.**, Nonlinear Operator Equations and Operator Differential Equations, Mir, Moscow, 1978(in Russian).
6 **Lions J.-L.**, Some methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems, Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.
7 **Lurie K.A.**, Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems, Plenum Press, NewYork, 1993.
8 **Murat F.**, Un contre-exemple pour le proleme de controle dans les coefficients, C.R.A.S.Paris, Ser. A 273(1971), 708-711.
9 **Murat F.**, Teoremes de non-existence pour des problemes de controle dans le coeffcicnts, C.R.A.S. Paris, Ser. A 274(1972), 395-398.
10 **Murat F., Tartar L.**, H-convergence, Topics in the mathematical modelling of composite materials, 21-43, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Vol.31, Birkhauser, Boston, MA, 1997.
11 **Tartar L.**, Estimations fines de coefficients homogeneises, Ennio De Giorgi colloquium (Paris, 1983), 168-187, Res. Notes in Math., Vol.125, Pitman, Boston, MA, 1985.
12 **Zgurovski M.Z., Mel'nik V.S.**, Nonlincar Analysis and Control of Physical Processes and Fields, Springer–Verlag, Berlin, 2004.
13 **Zhikov V.V., Kozlov S.M., Oleinik O.A.**, Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals, Sprnger Verlag, Berlin, 1994.

Надійшла до редколегії 28.01 09

Резюме

Т.А. Агошкова. В.Н. Трактинська. ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ЕЛЕМЕНТА НАЙКРАЩОГО НЕСИМЕТРИЧНОГО НАБЛИЖЕННЯ У ПРОСТОРАХ ІЗ ЗМІШАНОЮ ІНТЕГРАЛЬНОЮ МЕТРИКОЮ

Получен критерий элемента наилучшего несимметричного приближения для функций многих переменных в пространствах со смешанной интегральной метрикой.

The criterion of best non-symmetric approximant for functions of many variables in the spaces with mixed integral metric is obtained.

В. Ф. Бабенко. ТЕОРЕМА О ПОПЕРЕЧНИКЕ ШАРА В ПРОСТРАНСТВАХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Доказана теорема о слабых поперечниках шара в пространствах отображений со значениями в линейных нормированных пространствах. Приведен пример применения этой теоремы.

Theorem about week widths of ball in spaces of mapping having values in linear normed spaces is prooved. An example of application of this theorem is presented.

В.Ф. Бабенко, Р.О. Биличенко. НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ, ЗАДАВАЕМЫХ СТЕПЕНЯМИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ДРУГИМИ КЛАССАМИ

Для степеней $\mathbf{k} < \mathbf{r}$ самосопряженного оператора $\mathbf{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ найдено наилучшее приближение класса элементов, таких, что $\| A^k x \| \le 1$, классами элементов, для которых $\| A^k x \| \le N,\ N > 0$.

The best approximation of class of elements such that of $\| A^k x \| \le 1$ by classes of elements such that $\| A^k x \| \le N,\ N > 0$ for powers $\mathbf{k} < \mathbf{r}$ of self-adjoint operator $\mathbf{A}$ in Hilbert space $\mathbf{H}$ is found

В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович. О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО АДАМАРУ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ПОЛУОСИ

Получены новые точные неравенства для дробных производных по Адамару для функций, определенных на полуоси

New exact inequalities for Hadamard fraction derivatives of functions, defined on the half-line, are obtained

С.Б. Вакарчук, М.Б. Вакарчук. О НАИЛУЧШЕМ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ НА ПРЯМОЙ

Получены неравенства типа Джексона для наилучших среднеквадратических приближений дифференцируемых функций целыми функциями конечной степени на прямой.

Jackson-type inequalities have been obtained for the best mean square approximation of differentiable functions by means of the entire functions of finite type on the line.

В.Л. Великин. ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ОЦЕНКИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РАСТВОРОВ НЕКОТОРЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ЭРМИТОВЫХ СПЛАЙНОВ

Получены как двусторонние оценки, так и точные значения интерполяционных растворов некоторых подпространств эрмитовых сплайнов в пространствах непрерывно дифференцируемых функций

We received both upper and lower estimates as well as exact values mutual deviation of certain interpolatory subspaces of Hermitian splines in the spaces of continuously differentiable functions.

С.В. Гончаров. О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В МЕТРИКЕ L_ρ^p

Получен вариант усиления аналога теоремы Джексона о приближении на отрезке алгебраическими полиномами в интегральной метрике для некоторых классов интегрируемых с весом $\rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ функций

The version has been found, of improved Jackson's theorem analogue, concerning the approximation by algebraic polynomials on the interval in the integral metric for some classes of functions being integrable with the following weight: $\rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

А.В. Довженко, П.И. Когут. КВАЗІ-НАПІВНЕПЕРЕРВНА ЗНИЗУ РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ВІДОБРАЖЕНЬ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Предложен способ квази-полунепрерывной снизу регуляризации отображений в банаховых пространствах.

The method of the quasi-lower semicontinuous regularization of mappings in Banach spaces is proposed.

Л.В. Елец. ОЦЕНКА СНИЗУ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РАДИУСА ПОМПЕЙЮ ДЛЯ ПОЛОВИНЫ КОНУСА

Найдена оценки снизу наименьшего радиуса шара, в котором данное множество есть множеством Помпейю. В качестве множества рассматривается половина прямого кругового конуса с радиусом основания 1 и высотой $h>1$. Для $h>3$ найдено точное значение экстремального радиуса Помпейю.

Lower estimates are established for the smallest radius of a ball, in which a given set is the Pompeiu set. As the set, the half of the straight circular cone with radius of base 1 and altitude $h>1$ is considered. For $h>3$ the exact value of extreme Pompeiu radius is obtained.

В.А. Кофанов. ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСИ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕЙЛЯ

Получено неравенство, оценивающее полунорму Вейля производных функций, заданных на оси через равномерные нормы этих функций и их старших производных и решена соответствующая задача Колмогорова.

We prove the inequality that estimate seminorm of Weil of the derivatives of the functions on the real line with the help of uniform norm the functions and its derivatives. We solve also corresponding problem of Kolmogorov.

Т.В. Ломако, Р.Р. Салимов. ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА ПЛОЩАДИ

Исследуется обобщение задачи М.А. Лаврентьева об оценке площади образа круга. Показано, что полученная оценка в исследуемом классе точная.

In the present article, the generalization of Lavrent'ev problem about the estimate of area of image of the circle is studied. It is shown that the above estimate in the investigated class is precise.

О.В. Моторная, В.П. Моторный. СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ЧАСТНЫХ СУММ ФУРЬЕ-ЯКОБИ

Получены свойства обобщенных констант Лебега сумм Фурье-Якоби.

Property for the generalized Lebesque constants for the sums of Fourier-Jacobi are obtained.

А. Н. Пасько. НАИЛУЧШЕЕ ОДНОСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ W^rH^ω С УЧЁТОМ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ НА ОТРЕЗКЕ

Улучшен остаточный член в полученой ранее оценке наилучших односторонних приближений классов W^rH^ω с учётом положения точки на отрезке.

The estimation of the best one-sided pointwise approximation to the classes W^rH^ω with the remainder better than one of the previous estimation is obtained.

В.И. Рубан. ИНТЕРВАЛ, НАКРЫВАЮЩИЙ ОЦЕНКУ ДИСПЕРСИИ, ВЫЧИСЛЯЕМУЮ ПО ИНТЕРВАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Найдены точные значения нижней и верхней границ оценки дисперсии по интервальным данным, точные для каждой реализации выборки.

Exact for every interval data values of lower and upper bound for variance estimation is found.

С.В. Савела. О ПОПЕРЕЧНИКАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Получены точные значения слабых поперечников одного класса 2π-периодических функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве, определенного с помощью модулей непрерывности.

We find the exact values of weak widths the one class of 2π-periodic functions with the meaning in the Hilbert space, which is determined by modules of continuity.

Е.А. Севостьянов. О СВЯЗИ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНОГО ИСКАЖЕНИЯ С ИСКАЖЕНИЕМ ДЛИН В R^n

Исследованы отображения конечного искажения в R^n, $n \geq 2$. Доказано, что любое открытое дискретное отображение конечного искажения по Иванцу, мера множества точек ветвления которого равна нулю, является отображением конечного искажения длины при условии, что соответствующая внешняя дилатация $K_O(x,f) \leq K(x)$ почти всюду, где $K(x) \in L_{loc}^{n-1}(D)$.

The present paper is devoted to the investigations of mappings with finite distortion in R^n, $n \geq 2$. In the work it is proved that every open discrete mapping with finite distortion by Iwaniec such that the branch set of f is of measure zero, is a mapping with finite length distortion provided that the corresponding outher dilatation satisfies to inequality $K_O(x,f) \leq K(x)$ a.e., where $K(x) \in L_{loc}^{n-1}(D)$.

Д.С. Скороходов. О ЗАДАЧЕ ЛАНДАУ-КОЛМОГОРОВА НА ОТРЕЗКЕ ДЛЯ АБСОЛЮТНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Для класса функций, абсолютно монотонных на отрезке, решены задачи Ландау-Колмогорова и Колмогорова для трёх чисел.

We solve the Landau-Kolmogorov problem and the Kolmogorov problem for three positive numbers on the class of functions which are absolutely monotonic on a finite interval.

О.М. Ткаченко. УМОВИ, ПРИ ЯКИХ ПРОЕКЦІЙНІ СИЛОВСЬКІ ПІДГРУПИ МАЙЖЕ ЛОКАЛЬНО-НОРМАЛЬНОЇ ГРУПИ ЛОКАЛЬНО СПРЯЖЕНІ

Выделены два подкласса расширений локально-нормальных групп с помощью конечных p-групп, у которых проекционные силовские p-подгруппы локально сопряжены. В первом случае локально-нормальная подгруппа F конченого индекса содержит инвариантную силовскую p'-подгруппу, во втором случае силовские p-подгруппы в F почти абелевы. Приведен пример, показывающий, что для обоих подклассов условие расширения локально-нормальной группы именно с помощью p-группы является существенным.

Two subclasses of expansions of locally normal groups with the help of finite p-groups are selected, at which projective Sylow p-subgroup are locally conjugate. The subgroup F of a finite index contains in the first case invariant Sylow p'-subgroup, in the second case Sylow p-subgroups in F are almost abelian. The example that is given shows that for both subclasses the condition of expansion of locally normal group with the help just of p-group is essential.

М.Е. Ткаченко, В.Н. Трактинская. УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТА НАИЛУЧШЕГО НЕСИММЕТРИЧНОГО L_1-ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ПОДПРОСТРАНСТВОМ ПОСТОЯННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Получены условия единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения непрерывних на метрическом компакте векторнозначных функций подпространством постоянных отображений.

The conditions of uniqueness of the best non-symmetric L_1-approximant for continuous on metric compact vector-valued functions by the subspace of the constants are obtained.

В.А. Чупордя. ПРО ПІДГРУПИ БЛИЗЬКІ ДО ПРОНОРМАЛЬНИХ

Подгруппа H группы G называется абнормальной в G, если для любого $g \in G$ верно включение $g \in \langle H, H^g \rangle$. Подгруппа H группы G называется строго самонормализуемой, если для произвольной подгруппы K такой, что $H \leq K$, выполняется равенство $N_K(H) = H$ Получены примеры строго самонормализуемых подгрупп, которые не являются абнормальными.

A subgroup H is called abnormal in the group G if $g \in \langle A, A^g \rangle$ for each $g \in G$ A subgroup H of a group G is called strong selfnormalizer if for all subgroup K witch $H \leq K$ the equality $N_K(H) = H$ is true It was obtained the examples of non abmormal but strong selfnormalizer subgroups.

О. А. Яровая. О ГРУППАХ, БЛИЗКИХ К МЕТАГАМИЛЬТОНОВЫМ

Рассматриваются группы, все подгруппы которых либо нормальны, либо имеют черниковский коммутант. Доказано, что если такая группа имеет подгруппу конечного индекса, коммутант которой является черниковской подгруппой, то, и коммутант всей группы также будет черниковской подгруппой.

It was considered groups, whose subgroups are either normal or has chernikov commutant It was proved that if such group G has a subgroup H of finite index and its commutant is a chernikov group, than commutant of group G is a chernikov group.

O.P. Kogut, P.I. Kogut, T.N. Rudyanova. A NOTE ON H-CONVERGENCE

Изучаются свойства H-сходимости последовательности ограниченных квадратных матриц $\{A_\varepsilon \in L^\infty(D; R^{n\times n})\}_{\varepsilon>0}$. Получены достаточные условия, которые гарантируют совпадение H-предела с $*$-слабым пределом в $L^\infty(D; R^{n\times n})$ таких последовательностей.

In this paper we study the H-convergence property for the uniformly bounded sequences of square matrices $\{A_\varepsilon \in L^\infty(D; R^{n\times n})\}_{\varepsilon>0}$. We derive the sufficient conditions which guarantee the coincidence of *H*-limit with the weak-$*$ limit of such sequences in $L^\infty(D; R^{n\times n})$

ЗМІСТ